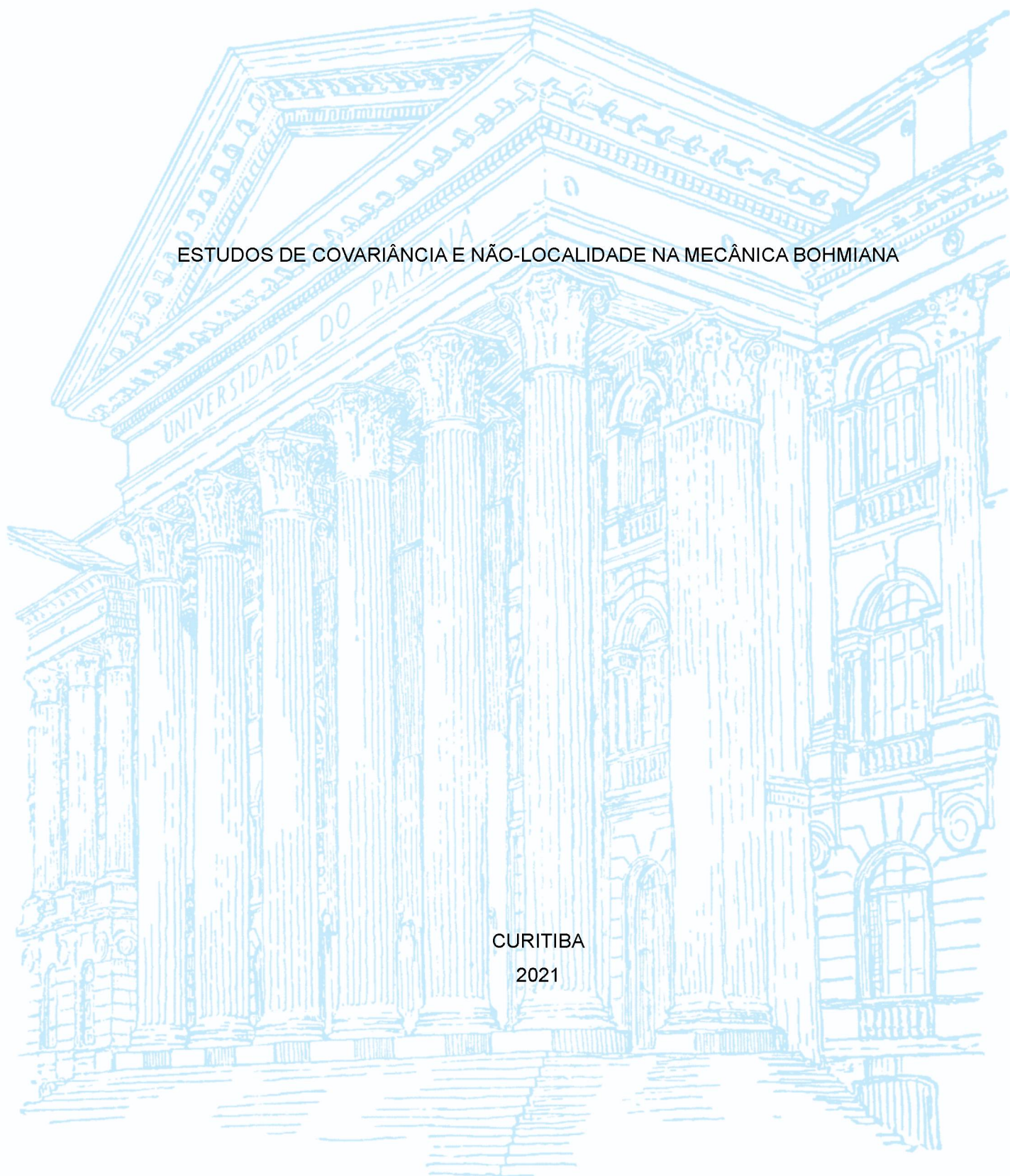


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEONARDO OLEJNIK

ESTUDOS DE COVARIÂNCIA E NÃO-LOCALIDADE NA MECÂNICA BOHMIANA

CURITIBA
2021



LEONARDO OLEYNIK

ESTUDOS DE COVARIÂNCIA E NÃO-LOCALIDADE NA MECÂNICA BOHMIANA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Renato Moreira Angelo

CURITIBA
2021

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

O45e Oleynik, Leonardo
 Estudos de covariância e não-localidade na mecânica Bohmiana [recurso eletrônico] /
 Leonardo Oleynik. – Curitiba, 2021.

 Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-
 Graduação em Física, 2021.

 Orientador: Renato Moreira Angelo.

 1. Teoria quântica. 2. Conjuntos de bases gaussianas (Mecânica quântica). I. Universidade Federal
 do Paraná. II. Angelo, Renato Moreira. III. Título

CDD: 530.12

Bibliotecária: Vanusa Maciel CRB- 9/1928

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **LEONARDO OLEJNIK** intitulada: **"Estudos de covariância e não-localidade na mecânica Bohmiana"**, sob orientação do Prof. Dr. RENATO MOREIRA ANGELO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 29 de Julho de 2021.

Assinatura Eletrônica

29/07/2021 17:10:52.0

RENATO MOREIRA ANGELO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

30/07/2021 12:46:49.0

ANA CRISTINA SPOTTE COSTA

Avaliador Interno Pós-Doc (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

30/07/2021 08:31:11.0

FREDERICO BORGES DE BRITO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho não teria sido possível sem a contribuição direta e indireta de várias pessoas, a quem dedico aqui meus agradecimentos.

Primeiramente, aos meus pais, pelo apoio incondicional de sempre.

Ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFPR pela enorme estrutura de aprendizado. Em especial, ao secretário Leandro por facilitar todos os trâmites burocráticos.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Ao Prof. Dr. Renato M. Angelo pela paciência, dedicação e ensinamentos.

À banca por avaliar este trabalho e sugerir contribuições importantes.

Ao Grupo de Fundamentos em Mecânica Quântica pelos debates instigantes e conhecimentos adquiridos. Em especial, ao Thales por revisar este trabalho.

Ao meu irmão Michel pela inspiração acadêmica e apoio de sempre.

À Nathalia pelo apoio e carinho em tantos momentos. Obrigado por estar na minha vida.

E aos amigos por me fazerem sorrir nos momentos mais difíceis.

*“Ali é igual a aqui, e antes é igual a agora e depois;
o tempo afoga-se na monotonia imensa do espaço,
e onde reina a uniformidade o movimento de um ponto a outro já não é mais movimento.
E onde movimento já não é mais movimento, não existe o tempo.”*
Thomas Mann

*“There is a difference between a shaky or out-of-focus photograph
and a snapshot of clouds and fog banks.”*
Erwin Schrödinger

“Who is going to carry the boats and the logs?”
David Goggins

RESUMO

De acordo com o princípio da covariância geral, as coordenadas são meros marcadores de eventos, a partir dos quais as leis físicas definitivas não deveriam depender. Quando o estendemos para o domínio quântico, vê-se que os recursos que codificam a informação acerca do estado são quantidades variantes e, portanto, mensuradas distintamente em cada referencial. Desses recursos, destaca-se a não-localidade (NL), a gênese de debates seminais na física. Nossa proposta consiste em quantificá-la através da mecânica Bohmiana, na qual a função de onda representa um *campo físico*. Para tanto, são distinguidas dois tipos de NL — associadas, respectivamente, à não inercialidade do referencial (NL- x) e ao emaranhamento (NL- ψ). A fim de identificar apenas a última, propomos uma forma de incluir o campo diretamente nas equações de força por meio de médias condicionais. Verificamos, então, que, para um sistema com duas partículas, a NL- x é condição necessária para a manifestação das contribuições da NL- ψ .

Palavras-chave: Referenciais Quânticos. Covariância. Não-Localidade. Mecânica Bohmiana.

ABSTRACT

According to the principle of general covariance, coordinates are mere markers of events, on which ultimate physical laws should not depend. When we extend it to the quantum domain, we see that the resources that encode information about the state are varying quantities and, therefore, measured distinctly in each frame of reference. Of these features, non-locality (NL) stands out — the genesis of seminal debates in Physics. Our proposal is to quantify it through Bohmian mechanics, a theory in which the wave function represents a *physical field*. For that, we distinguish between two types of NL — associated, respectively, with the non-inertiality of the frame (NL- x) and with the entanglement (NL- ψ). In order to identify only the last one, we propose a way to include the field directly into the force equations using conditional averages. We then verify that, for a system with two particles, NL- x is a necessary condition for the manifestation of the contributions of NL- ψ .

Keywords: Quantum reference frames. Covariance. Non-locality. Bohmian mechanics.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: MECÂNICA QUÂNTICA	13
2.1	Postulados e formulação	13
2.1.1	Observável	13
2.1.2	Estado	14
2.1.3	Dinâmica	15
2.2	Pacote Gaussiano	16
2.3	Teorema de Bell	18
2.3.1	Paradoxo EPR	18
2.3.2	Desigualdade de Bell	21
2.4	Emaranhamento para sistemas bipartidos	22
2.4.1	Entropia de emaranhamento	23
2.4.2	Entropia linear de emaranhamento	23
2.5	Referenciais Quânticos	24
2.5.1	O caso dos referenciais quânticos	26
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: MECÂNICA BOHMIANA	28
3.1	Mecânica Bohmiana para uma única partícula	29
3.1.1	Estados Estacionários	32
3.1.2	Partícula livre em uma dimensão	32
3.1.3	Dupla fenda	34
3.1.3.1	Limite colisional	35
3.1.3.2	Limite dispersivo	37
3.2	Mecânica Bohmiana para duas partículas	38
3.2.1	Não-Localidade e separabilidade	39
3.3	Formulações para Estados gerais	40
4	NÃO-LOCALIDADE E O PRINCÍPIO DE COVARIÂNCIA	43
4.1	Referenciais materiais	43
4.1.1	Referenciais clássicos	43
4.1.2	Referenciais conforme a MQ	46
4.1.2.1	Referencial Externo	47
4.1.2.2	Referencial Interno	48
4.1.3	Referenciais conforme a MB	50
4.1.3.1	Descrições gerais	51
4.1.3.2	Condições de Equivalência	52
4.2	Não-localidade na dinâmica Bohmiana	55
4.2.1	Categorias de não-localidade conforme a ontologia Bohmiana	55

4.2.2	Médias condicionais	57
4.2.2.1	Médias condicionais para sistemas com dois graus de liberdade	57
4.2.3	Sistema composto por duas partículas livres	59
4.2.3.1	Análise a partir de um referencial inercial	59
4.2.3.2	Análise a partir de um referencial quântico	60
5	CONCLUSÃO	63
	REFERÊNCIAS	65
	A APÊNDICE	69
A.1	Obtenção da trajetória da partícula livre	69
A.2	Distribuição normal genérica	69
A.3	Distribuição normal nas coordenadas relativas à a	70

1 Introdução

Se o espaço é uma entidade *sui generis* — imaterial, abstrata e absoluta — ou apenas uma abstração do conteúdo dos corpos — que existe *a partir* desses e não *independentemente* dos mesmos —, é uma questão de longa data. Embora remeta a debates metafísicos antigos, tal questão possui, na realidade, consequências importantes na fundamentação de qualquer teoria física, e.g.: como funciona o método de observação e quais devem ser os elementos físicos de uma teoria [1]; e como formular consistentemente a mecânica quântica (MQ) a partir de referenciais que interagem com o sistema [2].

A primeira, preconizada por Newton, considera o espaço como recipiente no qual os corpos materiais se movem; sua existência, *a priori*, independe dos corpos materiais e tampouco é por eles influenciada. A segunda remete a Ernest Mach e considera o espaço como a separação entre os corpos materiais, estando, assim, a eles condicionada¹. Iremos nos referir àquela e a esta como visão *absoluta* e *relativa*, respectivamente.

Na visão absoluta, qualquer referencial, i.e., a origem de um sistema de coordenadas, é definido a partir do *éter* (ou referencial inercial absoluto) e pode, ou não, estar sobre um corpo material — o que significa, portanto, que aquele não necessariamente deve estar sujeito às mesmas leis físicas deste. Já na visão relativa, ou relacional, qualquer referencial é também um ente material com massa finita e sujeito às mesmas leis que compõem a teoria — o que satisfaz o princípio de *covariância*: coordenadas são meros marcadores, dos quais as leis definitivas da física não podem depender. Apenas as posições relativas são relevantes. Iremos nos referir àquele e a este como referencial *externo* e *interno*, respectivamente.

O conceito de referencial é, em geral, fundamental na formulação de qualquer teoria física, pois, sempre que escrevemos alguma equação ou fazemos alguma observação empírica, evocamos, mesmo que implicitamente, um referencial. Como exemplo, temos a mecânica Newtoniana, formulada, inclusive, a partir de uma classe especial de referenciais, quais sejam, os inerciais — como ratifica sua invariância por transformações de Galileu. Isso significa, em outras palavras, que suas leis só são válidas para esse tipo específico de referencial.

Quanto à natureza dos referenciais, é fundamental que sejam materiais. Isso porque, antes de tudo, a física é uma ciência empírica, ou seja, fundamenta-se nas medições coletadas por um observador *em relação* a um referencial², o qual deve ser *acessível*. Na mecânica Newtoniana, por exemplo, isso não é um problema na maioria das vezes, pois sempre temos um referencial desse tipo à disposição, e.g., o laboratório ou a Terra. Contudo, esses referenciais só são viáveis quando suas massas forem muito maiores que aquelas do sistema de interesse (de modo que a força deste naqueles seja aproximadamente nula) — e.g., a força Coriolis é oriunda da não-inercialidade da Terra, em específico, do seu movimento de rotação. Em suma, um entendimento mais profundo dos fenômenos físicos requer um tratamento cuidadoso acerca dos referenciais envolvidos.

Muito embora a premissa de que “referenciais são sistemas de coordenadas abstratos cuja dinâmica é imutável por princípio” (como se esses não fossem suscetíveis a interações físicas) seja

¹ Uma consequência importante é que, em um universo composto por apenas uma partícula, não seria possível conceber a noção de espaço.

² Irredutivelmente, medições fornecem informações sobre um sistema *relativo* a outro.

frequentemente uma boa aproximação, conforme destacamos acima, ela está longe de ser a mais fundamental. A melhor abordagem é considerar os referenciais como constituintes materiais de massa finita sujeitos às mesmas leis do sistema de interesse. Para tanto, o procedimento usual consiste em: 1) formular a dinâmica a partir de um referencial externo, cujas coordenadas são denominadas absolutas; 2) transformá-las para coordenadas relativas a um ente material; e, por fim, 3) abandonar as primeiras. Isso é, a título de exemplo, o que se costuma fazer ao resolver-se o problema de dois corpos (a e b) na mecânica clássica (MC) — nesse caso, as novas coordenadas são a do centro de massa e a relativa $x_b - x_a$, caso o corpo a seja promovido a referencial material. Neste trabalho, adotaremos esse procedimento.

Toda essa discussão fica ainda mais interessante quando a estendemos para a MQ. Isso porque aspectos não-clássicos³ terão papéis importantes — se na MC a posição da partícula que será promovida a referencial tem sempre uma posição bem definida, na MQ isso será uma exceção. Ademais, as transformações entre referenciais serão mais sofisticadas, uma vez que se transformam vetores e operadores que pertencem a espaços de Hilbert, no lugar de vetores no espaço real.

Na literatura, desde a demonstração seminal de que a MQ pode ser consistentemente formulada do ponto de vista de uma partícula [2] — um *referencial quântico* —, a relevância desse assunto e sua construção têm sido ratificadas em um espectro diverso de contextos envolvendo detecção de emaranhamento [3], comunicação quântica [4], termodinâmica [5], cosmologia [6, 7], gravitação quântica [8, 9, 10], aspectos fundamentais da física [11, 12, 13, 14], entre outros.

Dessas, é pertinente destacar o papel desempenhado pela informação — um recurso fundamental [15, 16], por trás da computação [17] e termodinâmica [18]; e parte significativa da história contada pela MQ acerca da natureza [19, 20]. Segundo [21], trata-se de uma quantidade *invariante* por troca de referências, muito embora os recursos quânticos (como coerência e emaranhamento), nos quais a informação pode ser codificada e distribuída [22], *não* o sejam [12, 13, 23]. Isso significa que, embora referenciais distintos concordem quanto à informação presente em certo estado quântico ρ , eles discordarão acerca da quantidade de coerência ou *emaranhamento*, por exemplo.

Apesar dos avanços significativos sobre referenciais na MQ, pouco há sobre o assunto na mecânica Bohmiana (MB). Essa teoria ou interpretação alternativa da MQ prescreve que o universo é formado por partículas com trajetórias bem definidas, orientadas pela função de onda. Nesse sentido, a função de onda tem papel central na dinâmica e sua não-separabilidade é um dos ingredientes para interações de natureza não-local. Além disso, em contraste com a formulação usual (ou ortodoxa), a MB associa ao sistema físico um estado preciso cuja dinâmica é descrita por leis análogas à da MC; e entende as probabilidades da MQ meramente como uma necessidade prática, ao invés de uma propriedade intrínseca da natureza.

É nesse cenário, portanto, que reside o principal objetivo desta dissertação: *estudar e quantificar a NL por meio da dinâmica Bohmiana*. Muito embora alguns autores apontem características *absolutas* na MB, em especial no que se refere à função de onda⁴, nada impossibilita, a priori, uma abordagem *relativa*, que evoque o princípio de covariância. Também o propomos pois, em certo sentido, a MB é mais *completa* do que a MQ — isto é, embora aquela deva concordar com as previsões estatísticas desta, esta não se resume a isso. Na verdade, a MB permite uma narrativa a partir de trajetórias

³ E.g., emaranhamento, coerência e não-localidade (NL).

⁴ Por exemplo, [24] defende que essa é a causa do movimento das partículas, mas não sofre de seus efeitos, sendo dessa forma absoluta; e [25] defende que essa possui o status de lei física.

contínuas e causais no espaço físico para cada realização experimental e, portanto, uma análise mais *detalhada* dos efeitos consequentes de uma transformação de referenciais.

Dessa forma, para alcançar o objetivo acima apresentado: 1) distinguir-se-ão dois tipos de NL presentes na MB, as quais serão categorizadas ontologicamente, i.e., serão associadas uma à posição e outra ao campo ψ Bohmianos; então, 2) visando identificar apenas os efeitos referentes à segunda, definir-se-á a *média condicional local*; e, por fim, em um estudo de caso, 3) comparar-se-á a física de duas partículas livres do ponto de vista de um referencial clássico e outro quântico (uma das partículas).

Contextualizada a questão sobre referenciais internos e externos na mecânica clássica, quântica e Bohmiana, o restante do trabalho se encontra estruturado conforme descrito a seguir.

No Capítulo 2, apresenta-se a formulação ortodoxa da MQ, seus conceitos físicos e prescrições matemáticas, bem como o paradoxo EPR com suas implicações fundacionais que culminaram na desigualdade de Bell. Na sequência, discute-se sobre maneiras de detectar e quantificar o emaranhamento para sistemas bipartidos. Ademais, apresenta-se a formulação quântica para referenciais.

No Capítulo 3, explana-se a interpretação Bohmiana da MQ. Primeiramente, formulamo-la para um sistema com uma única partícula e a exemplificamos para estados estacionários, partícula livre e dupla fenda. Após, seguimos para sua generalização para sistemas com duas partículas, nas quais destacamos o aspecto explicitamente não-local da dinâmica. Ainda, apresentamos o início de uma formulação envolvendo estados mistos.

Já no Capítulo 4, estuda-se o *emaranhamento* e a NL presentes nas *leis* de movimento clássicas e quânticas oferecidas por um referencial interno com massa finita, do qual dois tipos de NL são ontologicamente categorizadas no escopo da MB e distinguidas a partir de uma estatística. Em seguida, aplicamos todo o conhecimento prévio na identificação quantitativa da NL na dinâmica de um sistema físico composto por duas partículas.

Por fim, no Capítulo 5, concluímos e revisitamos os principais tópicos.

2 Fundamentação Teórica: Mecânica Quântica

2.1 Postulados e formulação

Segundo [26], toda teoria física pode ser decomposta em três partes: 1) conjunto de conceitos físicos básicos; 2) objetos matemáticos definidos em um formalismo; e 3) conjunto de regras que associa os elementos do primeiro com os do segundo resultando numa linguagem ou narrativa. Assim, todo problema físico é primeiramente formulado em termos matemáticos (e.g., em uma equação) para, então, ser resolvido através de técnicas matemáticas e, por fim, ser interpretado e narrado dentro do conjunto de regras.

Enquanto a narrativa do mundo era clássica, esse processo correu natural e intuitivamente; afinal, a posição de uma partícula é facilmente associada aos números reais, sua contraparte matemática. Contudo, com o advento da MQ, alguns conceitos foram abandonados, outros reinventados, e novas estruturas matemáticas foram requisitadas, de modo com que as regras de correspondência que associavam estes com aqueles deixaram de ser intuitivas — até mesmo porque é bastante abstrato imaginar que o mundo pode ser descrito a partir de operadores Hermitianos e espaços vetoriais de dimensão infinita.

A seguir discutiremos, conforme [26, 17], três conceitos físicos que requerem uma expressão ou contraparte matemática na MQ: observável, estado e dinâmica.

2.1.1 Observável

Certas variáveis dinâmicas na MQ (como, por exemplo, a energia de um elétron) ora assumem valores contínuos (quando a partícula está livre) e ora discretos (e.g., quando há uma ligação química). De modo a descrever essas duas situações em pé de igualdade, postula-se:

Postulado 1. *Para toda variável dinâmica \mathbb{A} existe um operador Hermitiano A , cujos autovalores são os valores possíveis da variável.*

Ou seja, A deve satisfazer uma equação de autovetores $A|a\rangle = a|a\rangle$, em que a é o autovalor associado ao autovetor $|a\rangle$. Em outras palavras, A admite a seguinte *decomposição espectral*:

$$A = \sum_a a \mathbb{P}_a, \quad (2.1)$$

em que $\mathbb{P}_a = |a\rangle\langle a|$ é o projetor de a , pois projeta qualquer vetor $|\psi\rangle$ no subespaço definido por $|a\rangle$. Tal operador é chamado *observável* e conta com duas propriedades: seus autovalores são reais e seus autovetores formarem uma base para o espaço de estados.

Qualquer projetor conta com as seguintes propriedades:

1. **Idempotência:** $\mathbb{P}_a^2 = \mathbb{P}_a$.
2. **Completeza:** $\sum_a \mathbb{P}_a = \mathbb{1}$.
3. **Ortogonalidade:** $\mathbb{P}_a \mathbb{P}_{a'} = \delta_{aa'} \mathbb{P}_a$.

No caso contínuo, pode-se mostrar que

$$d\mathbb{P}_x := |x\rangle \langle x| dx \quad (2.2)$$

faz o papel do projetor (no sentido de cumprir com os requisitos acima) associado ao operador X , contínuo, de modo com que $\int d\mathbb{P}_x = \mathbb{1}$ e $d\mathbb{P}_{x_1} d\mathbb{P}_{x_2} = \delta_{x_1 x_2} d\mathbb{P}_{x_1}$, com $\delta_{x_1 x_2} \equiv \delta(x_1 - x_2) dx$.

O postulado acima atende às exigências das variáveis dinâmicas, visto que operadores (lineares) possuem espectros contínuos ou discretos, ou então, uma combinação de ambos. Além disso, operadores Hermitianos possuem espectro real, o que é esperado para uma variável física.

2.1.2 Estado

O conceito de *estado*, que aqui será apresentado, está intimamente associado à *interpretação estatística da MQ* de [27] — na qual o formalismo refere-se apenas à ensembles de sistemas quânticos, nunca à sistemas ou realizações individuais¹ —, em especial no que diz respeito à 1) *irreprodutibilidade* de eventos singulares em experimentos estatísticos e à 2) independência entre preparação e medição. Por fim, apresentaremos seu respectivo objeto matemático, o *operador densidade*, e esclareceremos como extrair desse as probabilidades e valores esperados.

Quanto à *irreprodutibilidade* de eventos singulares, considere-se, por exemplo, um experimento de espalhamento. Neste, uma partícula é *preparada* (i.e., acelerada em direção a um aparato, com o qual essa interage) e tem sua posição *medida*, da qual se infere o ângulo de espalhamento. Pela experiência, sabemos que, em geral, o ângulo obtido em dada *realização* do experimento não necessariamente será igual àquele obtido na realização seguinte (ou precedente), mesmo que a preparação seja idêntica — isto é, não existe replicabilidade para realizações experimentais únicas se o experimento em questão carrega alguma aleatoriedade. Contudo, sabe-se que após muitas realizações a frequência relativa com que cada ângulo é aferido (a razão entre eventos favoráveis pelo total de eventos) aproxima-se de um limite estável (a respectiva probabilidade), a qual é, sim, replicável, e portanto previsível.

Na verdade, o ponto acima pode ser feito para qualquer experimento *estatístico* em geral, o qual carrega em si alguma aleatoriedade ou incerteza (independente da sua origem, subjetiva ou objetiva). Como exemplo, pode-se citar o lançamento de uma moeda: se em dada realização obtém-se “cara”, não há nenhuma garantia que na realização seguinte se obterá “cara” (ou mesmo “coroa”) — a única previsão possível é que, em muitos lançamentos, o número de eventos associados a cada resultado é equivalente, ou seja, metade das vezes o resultado será “coroa” e na outra metade “cara”.

Acerca da independência entre preparação e medição, considere-se novamente o experimento de espalhamento e repare-se que: para a mesma preparação, em vez de medirmos a posição, poderíamos ter medido a energia da partícula (usando, é claro, outro detector); e, reciprocamente, a mesma medição (i.e., usando o mesmo detector de posição) poderia ser efetuada para uma preparação distinta (envolvendo um alvo diferente, por exemplo).

Em suma, uma preparação específica não determina a saída de uma medição subsequente, mas, sim, as probabilidades das possíveis saídas; e, como a preparação é independente da medição específica, essa deve determinar as distribuições de probabilidade para qualquer medição. Logo,

¹ [28] prefere classificá-la como interpretação *ingênua*, uma vez que o termo *estatístico* comumente refere-se à qualquer interpretação que *não* relacione as probabilidades quânticas à processos individuais.

nesse contexto, a melhor descrição para um sistema físico é o *estado*, identificado pela *especificação de distribuições de probabilidades para qualquer grandeza possível de medição* e representado matematicamente pelo *operador densidade*.²

Postulado 2. (Estado) *A descrição do estado de um sistema físico é dada por um operador densidade ρ que deve ser Hermitiano, não-negativo e de traço unitário.*

Para concluir, apresentaremos como extrair a distribuição de probabilidade para observáveis discretos e contínuos, bem como os seus valores esperados.

Postulado 3. (Probabilidade discreta) *Se $A |a_i\rangle = a_i |a_i\rangle$, a probabilidade de se obter a_i em uma medição de A é dada por $\wp(a_i) = \text{Tr}(\mathbb{P}_{a_i}\rho)$.*

Nela, $\mathbb{P}_{a_i} = |a_i\rangle\langle a_i|$ é o projetor associado à a_i e os valores esperados são calculados de acordo com

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\mathbb{P}_{a_i}\rho) = \sum_i a_i \text{Tr}(\mathbb{P}_{a_i}\rho) = \sum_i a_i \wp(a_i). \quad (2.3)$$

Postulado 4. (Probabilidade contínua) *Se $X |x\rangle = x |x\rangle$, o elemento de probabilidade de se obter x é dado por $d\wp(x) = \text{Tr}(\mathbb{P}_x\rho)$.*

Analogamente, os valores esperados serão:

$$\langle X \rangle = \text{Tr}(X\rho) = \int x \text{Tr}(d\mathbb{P}_x\rho) = \int x d\wp(x). \quad (2.4)$$

Caso o estado seja puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, então $d\wp(x) = dx|\psi|^2$ e a equação acima resume-se a

$$\langle X \rangle = \int dx x |\psi|^2. \quad (2.5)$$

2.1.3 Dinâmica

Temos as ferramentas necessárias para analisar um sistema quântico em um instante e para prever probabilisticamente os resultados de medidas nele efetuadas. Resta, contudo, esclarecer o que acontece após a medição e como um estado evolui no tempo. Para tanto, temos os seguintes postulados:

Postulado 5. (Colapso) *Após obter a em uma medição de A , o estado ρ colapsa para $\frac{\mathbb{P}_a\rho\mathbb{P}_a}{\sqrt{\text{Tr}(\mathbb{P}_a\rho\mathbb{P}_a)}}$.*

Postulado 6. (Dinâmica) *A evolução temporal do estado ρ é governada pela equação de von Neumann $i\hbar \partial_t \rho = [H, \rho]$, em que H é o operador Hamiltoniano e $[H, \rho] = H\rho - \rho H$.*

Caso o estado do sistema seja descrito por um vetor $|\psi(t)\rangle$, a equação acima reduz-se à famosa equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle, \quad (2.6)$$

a qual encapsula diversas propriedades como determinismo, princípio de superposição e conservação de probabilidade. A última será de vital importância nas discussões futuras, quando apresentaremos-a com mais detalhes.

² Mais tarde, quando apresentarmos a interpretação causal da MQ, essa será uma das noções a ser revista.

Caso exista $\mathbf{J} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\rho$ (densidade de corrente), que satisfaça

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.7)$$

em que $\rho = \langle \mathbf{x} | \psi(t) \rangle \langle \psi(t) | \mathbf{x} \rangle = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2$ é a densidade de probabilidade, então haverá conservação local de probabilidade. Isso pois, se a probabilidade de encontrar a partícula no elemento de volume dV , centrado em \mathbf{x} , variar no tempo, então, pela equação acima, sabemos que existirá um fluxo de densidade de corrente através da superfície que engloba o volume dV . Vejamos, a seguir, como encontrar \mathbf{J} .

Considere uma partícula sujeita ao potencial escalar $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$. Nesse caso, a representação na posição $\{|\mathbf{x}\rangle\}$ de (2.6) é

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \mathcal{V}(\mathbf{x}, t) \right] \psi(\mathbf{x}, t). \quad (2.8)$$

Através de manipulações simples (cf. [29]), encontra-se

$$\partial_t \rho + \frac{\hbar}{2im} [\psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) - \psi(\mathbf{x}, t) \nabla^2 \psi^*(\mathbf{x}, t)] = 0; \quad (2.9)$$

e, ao definir

$$\mathbf{J} := \frac{\hbar}{m} \text{Im} [\psi^*(\mathbf{x}, t) \nabla \psi(\mathbf{x}, t)], \quad (2.10)$$

verifica-se que seu divergente equivale ao segundo termo de (2.9), de modo que (2.9) equivale à (2.7). Ademais, como $\mathbf{J} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\rho$, podemos definir o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ explicitamente desta forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{J}}{\rho} = \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[\frac{\nabla \psi(\mathbf{x}, t)}{\psi(\mathbf{x}, t)} \right]. \quad (2.11)$$

Ou ainda, a partir da forma polar $\psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}$, em que $S = S(\mathbf{x}, t)$ é a fase da função de onda,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[\frac{\nabla \psi(\mathbf{x}, t)}{\psi(\mathbf{x}, t)} \right] \\ &= \frac{\hbar}{m} \text{Im} \left[\frac{\nabla \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + \frac{i}{\hbar} \nabla S \right] \\ &= \frac{\nabla S}{m}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Posta a dinâmica do estado, em especial no que diz respeito à de um estado puro e à sua interpretação probabilística via projetores; veremos a seguir soluções para (2.8) em termos de pacotes Gaussianos (ou distribuição normal). Esse tipo de solução, além de analiticamente tratável, prevê probabilidades e valores esperados dependentes do *tempo*, o que é essencial para uma análise cinemática, como a que faremos nesse trabalho.

2.2 Pacote Gaussiano

O objetivo desta seção é apresentar uma solução para (2.8) quando os potenciais são no máximo quadráticos — i.e., $\mathcal{V}(x, t) = kx^n$, em que k é uma constante de proporcionalidade e $n = 0, 1, 2$. Atentando-se ao fato de que pacotes Gaussianos preservam sua forma nesses casos [30], buscaremos soluções nas quais a função de onda de partida é desse tipo. Desse modo, uma

vez especificada a forma da distribuição em termos de parâmetros gerais, resta-nos calcular a evolução temporal desses para cada caso. Faremos isso na sequência, conforme [30].

A expressão analítica mais geral para evolução de um pacote Gaussiano é

$$\psi(x, t) \equiv \langle x | \psi(t) \rangle = N \exp \left\{ -\alpha_t (x - \bar{x})^2 + \frac{i}{\hbar} [\bar{p}(x - \bar{x}) + \gamma_t] \right\}, \quad (2.13)$$

na qual os parâmetros \bar{x} , \bar{p} , α_t e γ_t são funções do tempo e, a priori, sem qualquer interpretação física (essa será obtida na sequência). N é a constante de normalização. Nesse caso, o valor médio e desvio padrão da posição são dados por

$$\langle x \rangle = \bar{x}, \quad \Delta_x = \frac{1}{\sqrt{4 \operatorname{Re}(\alpha_t)}}, \quad (2.14)$$

enquanto o valor médio e o desvio padrão do momento são

$$\langle p \rangle = \bar{p}, \quad \Delta_p = \frac{\hbar |\alpha_t|}{\sqrt{\operatorname{Re}(\alpha_t)}}. \quad (2.15)$$

Por fim, a normalização é dada por

$$N = \left[\frac{2 \operatorname{Re}(\alpha_t)}{\pi} \right]^{\frac{1}{4}} e^{\operatorname{Im}(\alpha_t)/\hbar}. \quad (2.16)$$

Repare que o princípio de incerteza é sempre respeitado

$$\Delta_x \Delta_p = \frac{\hbar}{2} \frac{|\alpha_t|}{\operatorname{Re}(\alpha_t)} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.17)$$

Outra forma muito conveniente de expressar (2.13) é a polar, ou seja, $\psi(x, t) = \sqrt{G_{\Delta_x}}(x - \bar{x}) e^{\frac{i}{\hbar} S(x - \bar{x}, t)}$ com

$$G_{\Delta_x}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\Delta_x^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta_x^2}} \quad \text{e} \quad S(x, t) = -\hbar \operatorname{Im}(\alpha_t)x^2 + \bar{p}x + \operatorname{Re}(\gamma_t), \quad (2.18)$$

onde Δ_x e \bar{x} são dados conforme (2.14).

Para determinarmos a evolução temporal dos parâmetros em (2.13), recorreremos à equação de Schrödinger. Ou seja, substituímos (2.13) em (2.8) para o caso de uma dimensão

$$i\hbar \partial_t \psi = \left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \mathcal{V}(x, t) \right] \psi, \quad (2.19)$$

em que $\psi = \psi(x, t)$; equacionamos as potências de $x - \bar{x}$ e integramos as equações diferenciais resultantes. Como exemplo, considere a partícula livre $\mathcal{V}(x) = 0$. Nesse caso, as derivadas necessárias serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left[\left(-2\alpha_t (x - \bar{x}) + \frac{i}{\hbar} \bar{p} \right)^2 - 2\alpha_t \right] \psi, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[-\dot{\alpha}_t (x - \bar{x})^2 + 2\alpha_t (x - \bar{x}) \dot{\bar{x}} + \frac{i}{\hbar} (x - \bar{x}) \dot{\bar{p}} - \frac{i}{\hbar} \bar{p} \dot{\bar{x}} + \frac{i}{\hbar} \dot{\gamma}_t \right] \psi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

que, quando substituídas em (2.19) e equacionadas em potências de $x - \bar{x}$, resultam em

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_t &= -\frac{2i\hbar}{m} \alpha_t^2, \\ \dot{\bar{p}} &= 0, \\ \dot{\bar{x}} &= \frac{\bar{p}}{m}, \\ \dot{\gamma}_t &= -\frac{\bar{p}^2}{2m} + \bar{p} \dot{\bar{x}} - \frac{\hbar^2 \alpha_t}{m}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Por fim, quando a integramos, encontramos

$$\begin{aligned}\bar{p} &= \bar{p}_0, \\ \bar{x} &= \bar{x}_0 + \frac{\bar{p}_0}{m}t, \\ \gamma_t &= \frac{\bar{p}_0^2}{2m}t + \frac{i\hbar}{2} \ln \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_t} \right)\end{aligned}\tag{2.22}$$

e

$$\alpha_t = \frac{\alpha_0}{1 + (2i\hbar\alpha_0 t/m)}.\tag{2.23}$$

A interpretação de \bar{x} e \bar{p} é imediata: são as funções horárias dos centroides do pacote de onda em cada representação (posição e momento, respectivamente). Recorrendo às equações de Hamilton clássicas da partícula livre, percebe-se que essas equivalem à posição e ao momento canônico, respectivamente. Já α_t contribuirá para o desvio padrão da posição e do momento através de (2.14) e (2.15), respectivamente; por fim γ_t contribuirá para a fase S da função de onda, como podemos ver ao recorrer à (2.18),

$$S(x, t) = \frac{\hbar^2 t}{8m\Delta_x^2 \Delta_{x_0}^2} x^2 + p_0 x + \frac{p_0^2}{2m}t - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{\hbar t}{2m\Delta_{x_0}^2} \right),\tag{2.24}$$

em que $\Delta_x = \Delta_{x_0} \sqrt{1 + (\hbar t / 2m\Delta_{x_0}^2)^2}$.

Tratando-se da dinâmica de pacotes Gaussianos, é pertinente definir a escala de tempo

$$\tau := \frac{2m\Delta_{x_0}^2}{\hbar},\tag{2.25}$$

pois, a partir dessa, podemos escrever $\Delta_x = \Delta_{x_0} \sqrt{1 + (t/\tau)^2}$ e observar três comportamentos distintos:

- (Regime de Ehrenfest-Huygens) Quando $t \ll \tau$, a largura do pacote Δ_x permanece aproximadamente constante $\Delta_x \approx \Delta_{x_0}$, logo o movimento translacional (a distância percorrida no espaço pelo valor médio) antefere-se ao dispersivo (a taxa de alargamento do desvio);
- (Regime de Fraunhofer) Quando $t \gg \tau$, a largura do pacote cresce linearmente com t , $\Delta_x = \hbar t / 2m\Delta_{x_0}$; logo a dispersão se sobrepõe ao movimento translacional.
- (Regime de Fresnel) Quando $t \approx \tau$, $\Delta_x \approx \frac{\Delta_{x_0}}{2}(t/\tau)^2$, portanto ambos os movimentos são significativos.

2.3 Teorema de Bell

2.3.1 Paradoxo EPR

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) publicaram o artigo seminal [31]. Nesse, os autores, através de um paradoxo, concluem que a MQ não é uma descrição completa da natureza. A seguir, apresentá-lo-emo nas palavras de [32].

Começemos com uma condição necessária para uma teoria física ser completa:

- (Condição necessária para completeza). *Uma teoria é dita completa se para todo elemento de realidade $[A]$ existir uma contraparte na teoria (i.e., uma grandeza física \mathbb{A} que o represente).*

Ou seja, o formalismo da teoria, ou a sua linguagem, devem ser suficientes para descrever qualquer relação entre os elementos de realidade $[A]$ e os elementos da teoria \mathbb{A} em questão. Para reparar como é, no mínimo, sensato exigir isso de uma teoria, suponha-se uma que não atenda a esse critério. Nesse caso, duas conclusões anômalas poderiam ser feitas: 1) existem elementos de realidade indescritíveis pela teoria, isto é, sem contraparte na teoria e 2) existem grandezas físicas associadas a falsos elementos de realidade, ou a elementos que não existem.

A fim de aplicar o princípio acima para provar que tal teoria é incompleta — e.g., encontrando algum elemento sem contraparte física — precisamos de meios claros para identificar os elementos de realidade. Assim, apresenta-se a seguinte condição suficiente para existência destes:

- (Condição suficiente para elemento de Realidade CSER). *Se for possível prever, com probabilidade 1, o resultado da medição de uma variável física \mathbb{A} no instante t , dizemos que em t existe um elemento de realidade $[A]$ correspondendo à variável física \mathbb{A} com valor igual àquele previsto pela medição.*

Para exemplificá-la, considere uma partícula livre e isolada. Uma vez conhecida sua posição, através de uma medição no instante t , sabemos que, se a partícula não for submetida à qualquer dinâmica, sua posição será sempre a mesma e, conseqüentemente, sempre existirá um elemento de realidade para sua posição com aquele valor mensurado. Em teorias realistas³, como a MC e a MB, essa condição é trivialmente satisfeita por hipótese. Ou seja, sempre existirá um elemento de realidade $[A]$ correspondendo à variável física \mathbb{A} , pois este existe e tem valor bem definido independentemente da medição.

Postas as condições de completeza e de elemento de realidade acima, precisamos de um último princípio para então apresentarmos o argumento EPR:

- (Princípio da localidade). *Elementos de realidade pertencentes a um sistema não podem ser afetados por medições realizadas em outro sistema distante.*

Na prática, isso significa que operações realizadas localmente em um sistema \mathcal{A} no instante t só podem afetar os elementos de realidade de \mathcal{B} (distante l em relação a \mathcal{A}) em um instante $t' \geq l/\nu + t$, em que ν é a velocidade da luz no vácuo. Ou seja, qualquer interação física entre os dois sistemas deve respeitar a Relatividade Restrita.

Considere, agora, um sistema quântico composto por duas partículas de spin $1/2$ no estado singleto

$$|\Psi^-\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (2.26)$$

em que $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os autovetores de σ_z com autovalores $+1$ e -1 , respectivamente. Admita também que cada partícula está em um sítio distinto (rotulados por \mathcal{A} e \mathcal{B}) *suficientemente* distantes um do outro (para ser específico, distantes $l = (t' - t)/\nu$), de maneira que não exista sobreposição entre as funções de onda. Os operadores associados aos sítios \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente, são $A = \sigma_z \otimes \mathbb{1}_B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ e $B = \mathbb{1}_A \otimes \sigma_z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Dizemos que tal estado é *anti-correlacionado*, pois podemos prever com total acurácia o valor resultante da medida em \mathcal{A} (\mathcal{B}), dado que sabemos o valor obtido em \mathcal{B} (\mathcal{A}). O reflexo formal disso é que as probabilidades condicionais são iguais a 1.

³ “realismo é a crença de que objetos físicos existem independentemente de serem observados” [33]

Posto isso, temos todos os ingredientes para apresentar o argumento EPR. Para tanto, observe que:

1. Antes de qualquer medição, a melhor previsão que pode ser feita (dentro do formalismo da MQ) para o valor de σ_z em B é: metade das vezes esse será +1 e na outra metade -1. Logo, a *condição suficiente para elemento de realidade* não é atendida em B e, portanto, esse elemento de realidade *não existe*;
2. Se, no instante t_m , um observador em A mede σ_z e obtém +1 pela correlação acima destacada, podemos, para esse mesmo instante e enquanto o sistema permanecer isolado, prever (com probabilidade 1) o resultado de uma medição em B . Isso atende à *condição suficiente para elemento de realidade*, logo *existe* o elemento de realidade $[B]$;
3. Dado que somente operações locais foram realizadas no sítio A (o qual está *suficientemente* distante do B) e, assumindo localidade, concluímos que $[B]$ *já existia* para t' — ocasião destituída de elemento de realidade, pois, como observado em 1, o estado do sistema era singlete.

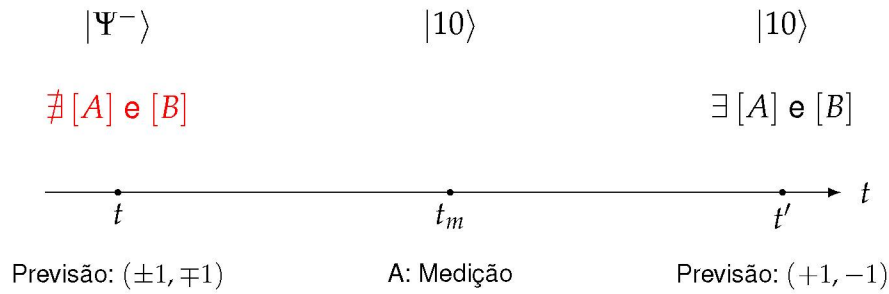


Figura 2.1 – Estado do sistema e seus elementos de realidade para três instantes de tempo segundo as observações 1 e 2: em $t'(t)$ (não) existe $[A]$ e $[B]$, uma vez que os observáveis A e B (não) satisfazem a condição suficiente para elemento de realidade.

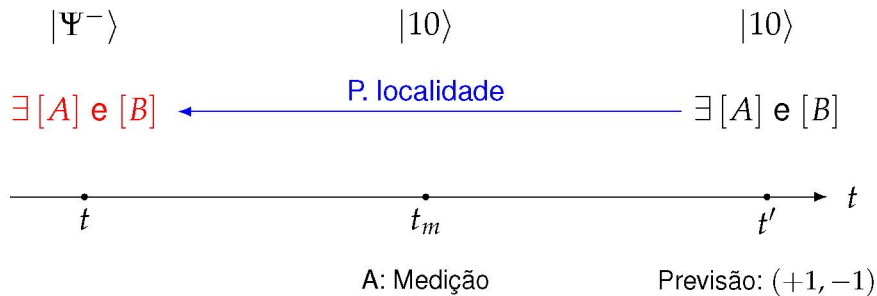


Figura 2.2 – Estado do sistema e seus elementos de realidade para três instantes de tempo segundo as observações 2 e 3: os elementos de realidade $[A]$ e $[B]$ existem para todo instante de tempo, inclusive para t , uma vez que as partículas estão suficientemente distantes uma das outras e porque os elementos de realidade satisfazem o princípio da localidade.

O paradoxo (no sentido de absurdo lógico) reside justamente nas conclusões contrárias das observações 1 e 3. Enquanto aquela, apoiada solenemente no formalismo da MQ, conclui que não há elementos de realidade para o spin das partículas (cf. Figura 2.1), esta, apoiada no formalismo,

mas também no princípio de localidade, conclui que há sim elementos de realidade (cf. Figura 2.2). Podemos resumir o argumento nesta sentença lógica:

- *se o formalismo quântico está correto e o princípio de localidade é respeitado, então a MQ é incompleta.*

Incompleta no sentido de não satisfazer a condição necessária para a completeza de uma teoria, pois a MQ não prevê a existência do elemento de realidade $[B]$ no exemplo acima. A sentença acima pode ser reescrita como:

- *Se o formalismo é correto, então ou a MQ é incompleta, ou o princípio de localidade é falso.*

Diante dessa última sentença lógica, EPR, assumindo que não é possível desistir do princípio de localidade, conclui que a MQ é incompleta.

2.3.2 Desigualdade de Bell

Diante do paradoxo EPR, muitos acreditavam (inclusive Einstein [31]) que a MQ deveria ser suplementada por variáveis ocultas locais⁴, i.e., acreditava-se que a estatística da teoria quântica fosse redutível em termos dessas variáveis. Contudo, como demonstrou Bell em [34], esse não é o caso: *a MQ é incompatível com a hipótese de causalidade local (CL)*. Na sequência, apresentaremos tais resultados, conforme [35].

Primeiramente, devemos generalizar um pouco o experimento anterior a fim de permitir que os observadores Alice (A) e Bob (B) meçam seus spins em direções arbitrárias \hat{A} e \hat{B} , com autovalores a e b ; i.e., os operadores associados às partições \mathcal{A} e \mathcal{B} sejam, respectivamente: $A = \hat{A} \cdot \vec{\sigma} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{A}})$ e $B = \hat{B} \cdot \vec{\sigma} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathcal{B}})$, em que $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ é o vetor de Pauli. Desse modo, para um grande número de realizações, a *dependência* entre as saídas pode ser explicitada na não fatorabilidade da probabilidade conjunta, condicionadas às observações A e B ,

$$\wp(a, b | A, B) \neq \wp(a | A) \wp(b | B). \quad (2.27)$$

A expressão acima, a princípio, não é evidência de NL, visto que a dependência entre as variáveis a e b pode estar associada a interações locais no início do experimento. Tomando essa consideração em hipótese, podemos supor que essas variáveis são independentes entre si, mas dependentes de outra variável desconhecida λ , a qual codificaria toda a história causal entre \mathcal{A} e \mathcal{B} e teria origem na interação inicial das duas partículas, por hipótese local (afinal, elas são criadas no mesmo sítio e depois afastadas). Logo, a probabilidade conjunta das saídas a e b condicionada às observações A e B , bem como à variável oculta λ , seria escrita como

$$\wp(a, b | A, B, \lambda) = \wp(a | A, \lambda) \wp(b | B, \lambda). \quad (2.28)$$

Contudo, a fim de torná-la mais geral, é natural supor que λ varie em cada realização experimental, pois, por construção, trata-se de uma variável não identificada por nenhuma teoria, de modo que não é possível prever seu valor nem controlá-la. Assim, é mais justo (e razoável) ponderar as probabilidades $\wp(a | A, \lambda)$ pela chance de λ ocorrer, i.e., tomando a média em λ de (2.28),

$$\wp(a, b | A, B) = \int_{\lambda} \wp(\lambda) \wp(a | A, \lambda) \wp(b | B, \lambda) d\lambda. \quad (2.29)$$

⁴ Oculta, no sentido de que não havia nenhuma teoria capaz de tratá-las; e local para satisfazer o princípio de localidade.

Essa é conhecida como *hipótese de CL*, pois qualquer correlação que exista entre as saídas a e b está associada à interação *local* no início do experimento, codificada pela variável λ .

Agora vamos mostrar, conforme [35], que a MQ viola tal hipótese. Para tanto, recorreremos ao cenário de Alice e Bob, acima mencionado, restringindo as possíveis direções a duas possibilidades cada ($\hat{A}, \hat{A}', \hat{B}, \hat{B}'$); e à função,

$$S(\varphi) = \langle A B \rangle + \langle A' B \rangle + \langle A B' \rangle - \langle A' B' \rangle, \quad (2.30)$$

em que $\langle A B \rangle = \text{Tr}(A B \rho)$, caso os valores sejam discretos. Tal função é particularmente importante, pois se, e somente se, φ atender à (2.29), então

$$S(\varphi) = \langle A B \rangle + \langle A' B \rangle + \langle A B' \rangle - \langle A' B' \rangle \leq 2. \quad (2.31)$$

Ou seja, caso $S > 2$, então a probabilidade φ necessariamente viola a *hipótese de causalidade local*⁵.

Posto isso, suponha que Alice e Bob compartilham o estado singleto e que as direções escolhidas sejam: $\hat{A} = \hat{e}_1, \hat{A}' = \hat{e}_2, \hat{B} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)$ e $\hat{B}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)$. Nesse caso, a MQ prevê que $\langle A, B \rangle = -\hat{A} \cdot \hat{B}$, de modo que os valores esperados em (2.30) são $\langle A, B \rangle = \langle A', B \rangle = \langle A, B' \rangle = 1/\sqrt{2}$ e $\langle A', B' \rangle = -1/\sqrt{2}$. Substituindo-os em (2.30), encontramos

$$S = 2\sqrt{2} > 2, \quad (2.32)$$

em contradição com (2.31) e, portanto, com a hipótese (2.29). Este é o conteúdo do Teorema de Bell: *demonstrar o caráter não-local de qualquer modelo que reproduza os resultados experimentais da MQ*. O exemplo mais consagrado de tal modelo é a MB, que será apresentada no próximo capítulo.

Violações da desigualdade (2.31), como a acima apresentada (2.32), e as previsões da MQ foram confirmadas de forma experimental e primeiramente por [38]. Posteriormente, [39] as ratificou de maneira mais convincente.

A seguir, discutiremos com mais detalhes a correlação presente nos estados que violam a desigualdade (2.31): o emaranhamento.

2.4 Emaranhamento para sistemas bipartidos

Começemos pela definição de *estado emaranhado*: um estado é dito emaranhado se é não-fatorável, isto é, se $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, tal que

$$\rho \neq \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i, \quad (2.33)$$

então ρ é emaranhado⁶. *Emaranhamento* será o tipo de correlação que sistemas compostos descritos por tais estados exibirão. Segundo [37], do ponto de vista de uma teoria de recursos, emaranhamento é uma correlação inalterada por *operações locais* e *comunicação clássica* — aquelas são operações localmente realizadas em apenas uma das partes de um sistema composto; esta refere-se à

⁵ Esse resultado é conhecido na literatura como a desigualdade CHSH [36]. Sua demonstração pode ser contemplada em [37].

⁶ Para estados puros, $p_i = 1$ e $\rho \neq \rho_A \otimes \rho_B$ é suficiente para definir um estado emaranhado.

transmissão de informação pelo espaço físico, isto é, qualquer comunicação que respeite o princípio de localidade.

Devido a essas particularidades, emaranhamento é um recurso muito estimado na área de Informação Quântica e, portanto, diversas formas de caracterizá-lo e quantificá-lo foram propostas (vide [40] para uma discussão extensa) — tanto para estados puros e mistos, como para sistemas bipartidos e multipartidos. Contudo, dentro do contexto desta dissertação, nos contentaremos apenas com aquelas associadas a estados puros bipartidos.

2.4.1 Entropia de emaranhamento

Apesar de simples, a definição (2.33) carece de praticidade, pois, caso sejamos capazes de fatorar certo estado, então, tacitamente, concluímos que esse não é emaranhado; caso contrário, ou o estado é de fato emaranhado, ou a possível decomposição ainda não foi encontrada. Para contornar tais dificuldades e também mensurar o grau de emaranhamento (i.e., distinguir entre estados muito e pouco emaranhados), temos, por exemplo, a medida chamada *entropia de emaranhamento*, definida conforme:

Definição 1. (*Entropia de Emaranhamento*): Para um estado puro em $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, o emaranhamento entre as partições \mathcal{A} e \mathcal{B} é dado por $E(\rho) = S(\rho_A)$, em que $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$, $S(\rho_A) = S(\rho_B)$ e $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho)$ é a entropia de von Neumann.

Repare que tal definição só é apropriada para estados puros e bipartidos, pois para esses casos apenas haverá o emaranhamento para ser quantificado pela entropia, conforme afirma [37]. Isto é, sistemas compostos associados a tais estados ou são totalmente descorrelacionados (se ρ for separável) ou a correlação existente será exclusivamente o emaranhamento (se ρ não for separável e, portanto, emaranhado). É válido frisar isso, uma vez que, em geral, estados mistos podem codificar correlações quânticas diferentes do emaranhamento e inclusive correlações clássicas.

Algumas propriedades importantes da entropia de von Neumann (cf. [17]) são:

1. *Não-negatividade*: A entropia é maior ou igual a zero $S(\rho)$, sendo nula se ρ é puro, i.e., se nosso conhecimento sobre o estado é máximo.
2. *Valor máximo*: O maior valor da entropia é $\log d$, com d a dimensão do espaço de Hilbert em que ρ atua. $S(\rho) \leq \log d$ a saturação só ocorre se o estado for maximamente emaranhado.
3. *Invariância*: A entropia é invariante por transformações unitárias U , i.e., $S(U\rho U^\dagger) = S(\rho)$.

2.4.2 Entropia linear de emaranhamento

Uma maneira mais conveniente de quantificar emaranhamento (a qual será usada neste trabalho) é a partir da entropia linear,

$$S_l(\rho) = 1 - \text{Tr}(\rho^2), \quad (2.34)$$

na qual $\text{Tr}(\rho^2)$ é conhecida como pureza.

Assim, S_l informa o quão misturado o estado está. Para constatar isso, considere

$$\rho_\epsilon = (1 - \epsilon)\rho + \epsilon \frac{\mathbb{I}}{d}, \quad 0 \leq \epsilon \leq 1, \quad (2.35)$$

que atua em um espaço de Hilbert de dimensão d . Trata-se de um estado que varia linearmente entre o estado puro ρ , quando $\epsilon = 0$, e o estado maximamente misto $\frac{1}{d}$, quando $\epsilon = 1$. Ao calcularmos sua entropia,

$$S_l(\rho_\epsilon) = \frac{(d-1)(2-\epsilon)\epsilon}{d}, \quad (2.36)$$

verificamos que essa é monotonicamente crescente com ϵ , ou seja, se $\epsilon' \leq \epsilon$, então $S_l(\rho_{\epsilon'}) \leq S_l(\rho_\epsilon)$ — para se convencer disso, basta recordar que toda função, cuja primeira derivada é não-negativa, é monotonicamente crescente. Em outras palavras, a entropia linear é inversamente proporcional à pureza do sistema.

Por fim, como acontece com S , a entropia linear do estado reduzido $S_l(\rho_r)$ será uma medida de emaranhamento $E_l(\rho) = S_l(\rho_r)$ — terá valor máximo $E_l(\rho) = 1 - 1/d$ quando o estado reduzido é maximamente misto e terá valor mínimo $E_l(\rho_r) = 0$ quando o estado é separável. Chamá-la-emos de *entropia linear de emaranhamento* e a definiremos conforme 2.4.1, mas com S_l em vez de S .

Antes de prosseguirmos, faremos uma mudança de notação. Até então, os operadores eram distinguidos de funções pelo contexto ou por serem escritos em maiúsculo. Agora, os operadores serão distinguidos por circunflexos, e.g. $A \rightarrow \hat{A}$. As exceções são os operadores densidade, unitárias e projetores.

2.5 Referenciais Quânticos

O conceito de referencial é muito estimado na física. Inclusive, a primeira lei de Newton tem a finalidade de definir um tipo específico de referencial: o *referencial* inercial. Devido a essa definição, mostrou-se que diferentes referenciais — e.g., R e R' , equipados com sistemas de coordenadas tais que $x' = x - \delta(t)$, em que $\delta(t)$ é a posição instantânea de R' relativa à R — devem *concordar* sobre física relatada, apesar das “régua” utilizadas em cada um serem visivelmente diferentes. Isto é, a segunda lei prevista por R ($F = m\ddot{x}$) e por R' ($F' = m\ddot{x}'$) serão *covariantes* (invariantes pela forma se $\ddot{\delta}(t) = 0$), mesmo que as coordenadas espaciais de R e de R' sejam *variantes*.

Para se convencer disso, reescreva F' em termos das coordenadas de R , i.e., $F' = m\ddot{x} - m\ddot{\delta}(t) = F - m\ddot{\delta}(t)$. Desta percebe-se que se, e somente se, a transformação for Galileana⁷, ou seja, se $\ddot{\delta}(t) = 0$ e $t' = t$, tem-se a covariância da segunda lei; caso contrário, $m\ddot{\delta}(t)$ dará origem a uma *pseudo* força.

Análises análogas serão realizadas na MQ; no entanto, o formalismo e a interpretação serão mais delicados. Agora, aquele será representado por unitárias que atuam no espaço de Hilbert (no lugar de simples funções reais); e este poderá ser interpretado sob duas perspectivas:

- Passiva (PP), na qual se muda o sistema de coordenadas, mantendo-se o estado fixo;
- Ativa (PA), na qual se conserva o sistema de coordenadas, mas fisicamente muda-se o estado quântico.

Formalmente, o contexto $C = \{\rho, \hat{x}\}$, em que ρ e \hat{x} são os observáveis relevantes à análise, transforma-se como:

- PA: $\{\rho', \hat{x}'\} = \{T\rho T^\dagger, \hat{x}\};$

⁷ A qual leva um referencial inercial à outro.

$$\bullet \text{ PP: } \{\rho', \hat{x}'\} = \{\rho, T^\dagger \hat{x} T\}.$$

Por fim, vale destacar que as visões são consensuais quanto aos observáveis *mensuráveis* da teoria (e.g., $\langle x \rangle$); isto é, a interpretação desses objetos independe da visão adotada, pois $\text{Tr} [\hat{x}(T\rho T^\dagger)] = \text{Tr} [(T^\dagger \hat{x} T)\rho]$.

Consideremos dois referenciais, R e R', equipados com sistemas de coordenadas tais que $x' = x - \delta$, de modo que um evento (e.g., a posição de uma partícula) observado em \bar{x} por R, é visto na posição $\bar{x} - \delta$ para R'. É natural exigir que as estatísticas observadas em cada referencial sejam conectadas por

$$\langle \hat{x} \rangle' = \langle \hat{x} \rangle - \delta, \quad (2.37)$$

para qualquer preparação quântica ρ . (Note que estamos falando de relatividade Newtoniana $t = t'$.) Se não fosse desta forma, o limite clássico induzido por um pacote de onda tendendo a uma delta de Dirac centrada em \bar{x} , do ponto de vista de R, não satisfaria a relação $\bar{x}' = \bar{x} - \delta$ do ponto de vista de R'. A pergunta central aqui é qual a prescrição para calcularmos $\langle \hat{x} \rangle'$. Dado que transformações de referenciais podem ser implementadas através de transformações unitárias denotadas por T , podemos propor que:

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle' &= \text{Tr} (\hat{x} \rho) - \delta = \text{Tr} [(\hat{x} - \delta) \rho] \\ &= \text{Tr} [\underbrace{(T^\dagger \hat{x} T)}_{\hat{x}'} \rho] \quad (PP) \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$= \text{Tr} [\hat{x} \underbrace{(T\rho T^\dagger)}_{\rho'}] \quad (PA), \quad (2.39)$$

sob a hipótese de que $T^\dagger \hat{x} T = \hat{x} - \delta$. Não é difícil ver que esta relação pode ser prontamente satisfeita se $T = e^{i\delta \hat{P}/\hbar}$, na qual \hat{P} é o operador momento (canonicamente conjugado à \hat{x}), o gerador das *translações*. Podemos então escrever $T^\dagger |x\rangle = |x + \delta\rangle$ e

$$\begin{aligned} T^\dagger \hat{x} T &= T^\dagger \hat{x} \mathbb{1} T \\ &= \int dx T^\dagger \hat{x} |x\rangle \langle x| T \\ &= \int x d\mathbb{P}_{x+\delta} \\ &= \int (x - \delta) d\mathbb{P}_x, \end{aligned} \quad (2.40)$$

na qual usamos o projetor contínuo, $d\mathbb{P}_x = \int dx |x\rangle \langle x|$, definido em (2.2). Ademais,

$$\langle \hat{x} \rangle' = \int (x - \delta) \text{Tr} (d\mathbb{P}_x \rho) = \int (x - \delta) d\wp(x), \quad (2.41)$$

$$= \int x' \text{Tr} (d\mathbb{P}_{x'+\delta} \rho) = \int x' d\wp(x' + \delta), \quad (2.42)$$

onde usamos $x' = x - \delta$ e $dx = dx'$. Vemos que ao utilizarmos os valores médios $x - \delta$, a probabilidade $d\wp(x)$ a ser usada é precisamente aquela usada em R. A pergunta central aqui é qual a prescrição para calcularmos o elemento de probabilidade $d\wp'$ associado a um evento na locação $x' = x - \delta$ em R'. A resposta natural para a pergunta em questão parece ser

$$d\wp'(x') \equiv \text{Tr} [d\mathbb{P}_{x'+\delta} \rho] = \text{Tr} [(T^\dagger d\mathbb{P}_x T) \rho]_{x \rightarrow x'}, \quad (2.43)$$

isto é, $d\wp'(x') = d\wp(x' + \delta)$. Vamos checar as receitas acima com um pacote Gaussiano centrado em \bar{x} , i.e., $|\langle x|\psi\rangle|^2 = |\psi(x - \bar{x})|^2 = G_\Delta(x - \bar{x})$. Por construção, temos $\langle \hat{x} \rangle = \int dx x |\psi(x - \bar{x})|^2 = \bar{x}$ e $d\wp(x) = |\psi(x - \bar{x})|^2 dx$. Segue que

$$\langle \hat{x} \rangle' = \int \hat{x} \text{Tr}(d\mathbb{P}_{x+\delta} \rho) = \int dx x |\langle x + \delta | \psi \rangle|^2 = \int dx x |\psi(x - (\bar{x} - \delta))|^2 = \bar{x} - \delta, \quad (2.44)$$

$$d\wp'(x') = \text{Tr}[(T^\dagger d\mathbb{P}_x T) \rho]_{x \rightarrow x'} = |\langle x + \delta | \psi \rangle|^2_{x \rightarrow x'} dx' = |\psi(x' - (\bar{x} - \delta))|^2 dx'. \quad (2.45)$$

Sendo $\psi(x - \bar{x})$ a função de onda para R, isto é, $|\psi\rangle = \int dx \psi(x - \bar{x}) |x\rangle$, então, na *perspectiva ativa*, é natural tomarmos $\psi(x - (\bar{x} - \delta))$ como a função de onda vista de R', já que

$$T|\psi\rangle = \int dx \psi(x - \bar{x}) T|x\rangle = \int dx \psi(x - \bar{x}) |x - \delta\rangle = \int dx' \psi(x' - (\bar{x} - \delta)) |x'\rangle. \quad (2.46)$$

Note-se que não há nenhuma mudança na forma da densidade de probabilidade, apenas uma “re-rotulação” no argumento. Isso é desejável já que probabilidades referem-se à contagem de eventos no ensemble e o número de eventos (favorável ou total) é absoluto.

Vejamos ainda qual a prescrição para variância e para a entropia de emaranhamento no novo referencial. Como aquela é meramente uma função dos valores esperados, sua definição segue naturalmente,

$$\begin{aligned} (\Delta_x^2)' &:= \langle \hat{x}^2 \rangle' - \langle \hat{x} \rangle'^2 = \text{Tr}[(\hat{x}' - \langle \hat{x}' \rangle)^2 \rho] \\ &= \text{Tr}[(\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \rho']. \end{aligned} \quad (2.47)$$

E, como esta depende apenas do estado, somos levados a adotar PA, definindo-a a partir do novo estado — ou seja, $E' = E(T\rho T^\dagger)$, em que $E = E(\rho)$ é entropia de emaranhamento para o estado bipartido $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$ e T a unitária que leva ao novo referencial. Segue disso e da invariância da entropia de von Neumann por evoluções unitárias que se T for *separável* ($T = T_A \otimes T_B$), então o emaranhamento é invariante por essa troca de referencial. Basta reparar que $E' = S(T\rho_A T^\dagger) = S(\rho_A) = E$.

2.5.1 O caso dos referenciais quânticos

Consideramos agora partículas a e b sendo observadas por R. A física é descrita em termos do contexto $\{\hat{x}_a, \hat{x}_b, \rho\}$, com $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. A transformação que promove a partícula a a referencial é dada por $T = \hat{p}_a e^{i\hat{x}_a \hat{p}_b / \hbar}$, com \hat{p}_a o operador paridade atuando em \mathcal{H}_A . (Onde aparece $\hat{x}_a \hat{p}_b$ leia-se $\hat{x}_a \otimes \hat{p}_b$.) Na *perspectiva passiva*, fazemos as seguintes identificações:

$$\begin{aligned} \hat{X}_R &\equiv T^\dagger \hat{x}_a T = -\hat{x}_a, & \hat{\Pi}_a &\equiv T^\dagger \hat{p}_a T = -(\hat{p}_a + \hat{p}_b), \\ \hat{X}_b &\equiv T^\dagger \hat{x}_b T = \hat{x}_b - \hat{x}_a, & \hat{\Pi}_b &\equiv T^\dagger \hat{p}_b T = \hat{p}_b, \end{aligned} \quad (2.48)$$

nas quais \hat{X}_R denota a posição de R relativa a partícula a . Segue que

$$\langle \hat{X}_R \rangle \equiv \text{Tr}[(T^\dagger \hat{x}_a T) \rho] = -\langle \hat{x}_a \rangle, \quad \langle \hat{X}_b \rangle \equiv \text{Tr}[(T^\dagger \hat{x}_b T) \rho] = \langle \hat{x}_b \rangle - \langle \hat{x}_a \rangle. \quad (2.49)$$

Repare-se que os momentos não admitem interpretação relativa à partícula a . Nessa perspectiva, não há qualquer necessidade de se alterar a equação de Schrödinger, pois os estados não se alteram pela transformação. O elemento de probabilidade medido no novo referencial pode ser

calculado com

$$\begin{aligned} d_{\wp}(X_R, X_b) &= \text{Tr} \left[(T^\dagger d\mathbb{P}_{x_a} \otimes d\mathbb{P}_{x_b} T) \rho \right]_{\substack{x_a \rightarrow X_R \\ x_b \rightarrow X_b}} = \text{Tr} \left[d\mathbb{P}_{-x_a} \otimes d\mathbb{P}_{x_b - x_a} \rho \right]_{\substack{x_a \rightarrow X_R \\ x_b \rightarrow X_b}} \\ &= \left[|\psi(-x_a, x_b - x_a)|^2 dx_a dx_b \right]_{\substack{x_a \rightarrow X_R \\ x_b \rightarrow X_b}} = \psi(-X_R, X_b - X_R) dX_R dX_b. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Veja-se que $dx_a dx_b = dX_R dX_b$ com $(X_R, X_b) \equiv (-x_a, x_b - x_a)$. De todo modo, a receita dada acima já faz a troca adequada do elemento de área. Novamente, é instrutivo ver o que acontece para um estado Gaussiano separável. Seja $\psi(x_a, x_b) = \sqrt{G_{\Delta_a}(x_a - \bar{x}_a) G_{\Delta_b}(x_b - \bar{x}_b)}$. Segue que

$$\begin{aligned} d_{\wp}(X_R, X_b) &= \left[G_{\Delta_a}(-x_a - \bar{x}_a) G_{\Delta_b}(x_b - x_a - \bar{x}_b) dx_a dx_b \right]_{\substack{x_a \rightarrow X_R \\ x_b \rightarrow X_b}} \\ &= G_{\Delta_a}(X_R + \bar{x}_a) G_{\Delta_b}(X_b - (X_R + \bar{x}_b)) dX_R dX_b. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A segunda densidade está centrada, por assim dizer, em $X_R + \bar{x}_b$. Porém, a primeira densidade seleciona a coordenada X_R em torno de $-\bar{x}_a$, já que este é o ponto mais provável. Logo, a segunda densidade está efetivamente centrada em $\bar{x}_b - \bar{x}_a$, e tudo faz o devido sentido.

3 Fundamentação Teórica: Mecânica Bohmiana

Segundo [41], a interpretação usual da MQ baseia-se numa premissa pouco esclarecedora: o estado físico do sistema é completamente especificado pelo operador densidade (vide subseção 2.1.2), que determina apenas as distribuições probabilísticas dos resultados oriundos de um ensemble estatístico de experimentos idênticos. Essa premissa foi alvo de diversas críticas. Einstein, por exemplo, sempre defendeu que, mesmo no nível quântico, devem existir variáveis dinâmicas que determinem o verdadeiro comportamento do sistema e não meramente a sua tendência média. Nesse sentido, Einstein entendia a formulação ortodoxa da teoria como incompleta, conforme já discutimos na subseção 2.3.1.

Ainda segundo [41], a maioria dos físicos da época pensavam que objeções, como as de Einstein, não eram relevantes à Física, uma vez que: 1) a MQ e a sua interpretação usual (apresentadas no capítulo anterior) concordam com a grande maioria dos resultados experimentais; 2) nenhum modelo alternativo havia sido proposto até então. Diante da ausência de um modelo alternativo, David Bohm propõem sua interpretação em termos de variáveis “ocultas” [41, 42] — a qual posteriormente seria conhecida como mecânica Bohmiana¹. Em contraste com a formulação usual, a MB associa ao sistema físico um estado preciso, cuja dinâmica é descrita por leis análogas às da MC. Ainda, entende que as probabilidades da MQ constituiriam uma mera necessidade prática, e não uma propriedade intrínseca da natureza.

Ainda segundo [41], a maioria dos físicos da época pensavam que objeções, como as de Einstein, não eram relevantes à Física, uma vez que: 1) a MQ e a sua interpretação usual (apresentadas no capítulo anterior) estão em excelente acordo com a grande maioria dos experimentos²; 2) nenhum modelo alternativo havia sido proposto até então. Diante da ausência de um modelo alternativo, David Bohm propõem sua interpretação em termos de variáveis “ocultas” [41, 42] — a qual posteriormente seria conhecida como mecânica Bohmiana³. Em contraste com a formulação usual, a MB associa ao sistema físico um estado preciso, cuja dinâmica é descrita por leis análogas às da MC. Ainda, entende que as probabilidades da MQ constituiriam uma mera necessidade prática, e não uma propriedade intrínseca da natureza.

Este capítulo encontra-se estruturado da seguinte forma: na seção 3.1, apresentamos os principais fundamentos da MB para uma única partícula (conforme [41, 45, 46]) aplicando-a aos estados estacionários, à partícula livre e ao experimento da dupla fenda [45, 47]; em seguida, na seção 3.2, generalizamos a formulação para duas partículas [45, 46, 48], na qual destacamos o aspecto explicitamente não-local do potencial quântico e sua relação com o emaranhamento; e, por fim, na seção 3.3, apresentamos o início de uma formulação envolvendo estados mistos.

3.1 Mecânica Bohmiana para uma única partícula

¹ Muito embora propostas similares já houvessem sido feitas por De Broglie [43] e Madelung [44]. Bohm, segundo ele próprio, foi o primeiro a levar a interpretação às suas conclusões lógicas.

² “Com exceção talvez daqueles envolvendo escalas inferiores à 10^{-13}cm ”, segundo [41].

³ Muito embora propostas similares já houvessem sido feitas por De Broglie [43] e Madelung [44]. Bohm, segundo ele próprio, foi o primeiro a levar a interpretação às suas conclusões lógicas.

Começemos apresentando o formalismo de Hamilton-Jacobi para uma partícula de massa m . Essa formulação da MC permite prescrever a evolução de um ensemble (infinito) de trajetórias $\{\mathbf{x}_c(t), \varrho\}$ — em que $\varrho \equiv \varrho(\mathbf{x}, t)$ é a distribuição de partículas para cada instante t (construída a partir do número de partículas em cada intervalo $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$); e $\mathbf{x}_c(t)$ representa uma família de trajetórias, cujas condições iniciais $\mathbf{X}_c(t_0)$ diferem ligeiramente. Tais trajetórias são definidas a partir do campo de velocidades,

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla s / m, \quad (3.1)$$

desta forma:

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_c(t), t). \quad (3.2)$$

Nas quais $s \equiv s(\mathbf{x}, t)$ é o *gerador das trajetórias*, uma vez que define um conjunto de trajetórias por meio da equação (3.2), bem como a solução da *equação de Hamilton-Jacobi* (HJ),

$$H(\mathbf{x}, \nabla s, t) \equiv \partial_t s + \frac{(\nabla s)^2}{2m} + \mathcal{V} = 0, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}, t), \quad (3.3)$$

em que H é a Hamiltoniana de uma partícula sujeita ao potencial \mathcal{V} . Ou seja, enquanto em (3.1) associa-se a cada coordenada espaço-temporal (\mathbf{x}, t) um vetor velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, em (3.2) o valor do campo em dado ponto do espaço $\mathbf{x}_c(t)$ define a velocidade da partícula $\dot{\mathbf{x}}_c(t)$ posicionada no mesmo ponto. Trata-se, respectivamente, da descrição Euleriana e Lagrangeana da mecânica dos fluidos.

Vale frisar que, diferentemente da formulação Newtoniana (ou mesmo Hamiltoniana), analisa-se a evolução temporal de um conjunto de trajetórias, em vez de apenas uma. Naturalmente tais trajetórias evoluem de forma contínua no espaço de modo que a distribuição ϱ conserva-se localmente de acordo com

$$\partial_t \varrho = -\nabla \cdot (\varrho \mathbf{v}). \quad (3.4)$$

Tal abordagem formalmente assemelha-se àquela encontrada na hidrodinâmica clássica, no sentido de também acompanhar a evolução de um ensemble. Contudo, nesta o ensemble é constituído por *partículas de fluido* (partículas materiais que compõem o fluido e, portanto, coexistem no mesmo espaço), enquanto em (3.3) o ensemble é formado a partir de inúmeras realizações experimentais, i.e., as trajetórias *não* coexistem no espaço.

Agora, voltando a MQ, veremos ser possível obter equações análogas à (3.3) e à (3.4) a partir da equação de Schrödinger para uma partícula sujeita ao potencial $\mathcal{V}(\mathbf{x}, t)$,

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + \mathcal{V} \right) \psi(\mathbf{x}, t), \quad (3.5)$$

quando substituimos a representação polar da função de onda,

$$\psi \equiv \psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}, \quad \rho = |\psi(\mathbf{x}, t)|^2, \quad S = S(\mathbf{x}, t). \quad (3.6)$$

Basta, para tanto, conduzir as derivações explicitamente em $\sqrt{\rho}$ e S e separar as partes reais e imaginárias, obtendo-se, respectivamente:

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \left(\frac{\rho \nabla S}{m} \right) \quad (3.7)$$

e

$$\partial_t S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + \mathcal{V} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} = 0, \quad (3.8)$$

A primeira é simplesmente a equação de continuidade escrita na forma polar, sendo $\frac{\rho \nabla S}{m}$ equivalente à densidade de corrente (2.10); portanto, pode-se concluir, como feito na subseção 2.1.3, que $\nabla S/m$ denota o campo de velocidades que conduz a evolução dos elementos de probabilidade. Já a segunda equação, por comparação direta com (3.3), será, nas discussões subseqüentes, a equação de *Hamilton-Jacobi Quântica* (HJQ), na qual o último termo será interpretado como o *potencial quântico*.

Repare-se que, apesar de formalmente equivalentes, a menos de $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}$, as equações (3.3) e (3.8) diferem-se conceitualmente, pois, enquanto a solução s daquela prescreve a evolução de um ensemble de trajetórias, a partir de (3.2); a solução S desta, a priori, não precisa fazê-lo. Na verdade, ela só o fará mediante postulado. É nesse sentido, portanto, que David Bohm em [41] sugere que sistemas quânticos podem ser descritos a partir de partículas com trajetórias contínuas no espaço — essas partículas seriam guiadas pelo campo físico ψ e o *estado*⁴ (partícula e ψ) seria causalmente determinável. Assim sendo, postula-se:

Postulado 7. *A dinâmica de uma partícula em um experimento singular é definida pela trajetória $\mathbf{x}(t)$ que se move continuamente sobre a orientação da função de onda ψ , solução da equação de Schrödinger. A trajetória é obtida integrando-se*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \quad e \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla S/m \quad (3.9)$$

no tempo. As condições iniciais $\mathbf{x}(t_0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t_0)$ devem ser especificadas para completamente determinar-se a trajetória.

No postulado acima fica implícito, portanto, que a fase S , assim como função s , satisfazem equações do tipo Hamilton-Jacobi — (3.8) e (3.3), respectivamente. Aquela, contudo, contém um termo extra (não previsto classicamente), que será entendido como um potencial que influenciará a dinâmica da partícula: o *potencial quântico*,

$$Q^{[\psi]} \equiv Q^{[\psi]}(\mathbf{x}, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}. \quad (3.10)$$

Vale enfatizar que, embora o formalismo de Hamilton-Jacobi seja fundamental para proposição da teoria, nada nos impede de formular a dinâmica usando a segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F}^{[\psi]} \equiv \mathbf{F}^{[\psi]}(\mathbf{x}, t) = -\nabla(Q^{[\psi]} + \mathcal{V}), \quad (3.11)$$

e condições iniciais apropriadas. Ademais, pela equivalência entre as equações (2.7) e (3.7), podemos definir o campo de velocidades através da densidade de corrente (2.10) desta forma:

$$\mathbf{v}^{[\psi]} \equiv \mathbf{v}^{[\psi]}(\mathbf{x}, t) := \frac{\mathbf{J}}{\rho}, \quad (3.12)$$

o qual expressa-se como (2.12) ou (2.11). Superindexamos as quantidades acima por ψ para lembrar qual a função de onda que orienta a dinâmica.

⁴ Repare que essa noção de *estado* difere daquela apresentada na subseção 2.1.2.

Acima afirmamos que a função de onda *orienta* ou *guia* a partícula. Fazemo-lo porque na MB, além da interpretação probabilística de Born, ψ representar um campo físico real — i.e., como qualquer outro campo, seu valor em dado ponto do espaço, em dado instante, define a força a cuja partícula posicionada no mesmo ponto estará sujeita. Ou seja, enquanto no eletromagnetismo uma carga q , com posição instantânea $\mathbf{x}(t)$, imersa em um campo elétrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, está sujeita à força $q\mathbf{E}(\mathbf{x}(t), t)$, uma partícula quântica está sujeita à força $\mathbf{F}^{[\psi]}(\mathbf{x}(t), t)$ dada por (3.11). Ademais, ambos os campos satisfazem as equações que ditam sua evolução temporal (a equação de Maxwell e a de Schrödinger, respectivamente), de modo que, uma vez definido o campo em dado instante, pode-se encontrar o valor do campo para qualquer outro.

Apesar das semelhanças acima mencionadas entre o campo eletromagnético e ψ , na MB, a fim de salvaguardar as previsões estatísticas da formulação ortodoxa, define-se o *momento inicial* da partícula através da fase S de ψ pela equação (3.9). Isto é, enquanto as condições iniciais no eletromagnetismo não têm conexão direta com os valores dos campos, na MB, apenas a posição inicial será dessa forma, pois o momento inicial será sempre $\mathbf{p}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \nabla S(\mathbf{x}(t_0), t_0)$.

Quanto à posição inicial, essa é experimentalmente inacessível ou oculta e, portanto, postula-se:

Postulado 8. (Hipótese de Equilíbrio Quântico) *A posição inicial $\mathbf{x}(t_0)$ é inacessível (não pode ser conhecida com precisão arbitrária) e distribui-se segundo $|\psi(\mathbf{x}, t_0)|^2$.*

Isto é, quando o experimento é realizado infinitas vezes, sempre preparando o mesmo ψ , as posições iniciais $\mathbf{x}(t_0)$ do ensemble de trajetórias distribuem-se de acordo com $|\psi|^2$ — i.e., o número de trajetórias no intervalo $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$, no instante t_0 é proporcional ao módulo quadrado da função de onda⁵. Ao assumir que a regra de Born vale para partículas no instante inicial, garante-se, via continuidade (2.7), que essa valerá para qualquer t (propriedade conhecida pelo nome de *equivariância*, cf. [49, 50]). Isso é importante, pois justifica como a teoria Bohmiana (determinista, per se) reproduz as probabilidades quânticas encontradas empiricamente: a estatística da MQ é simplesmente uma necessidade prática, reflexo da ignorância subjetiva acerca da condição inicial do sistema, em vez de uma propriedade objetiva da natureza. Ou seja, uma vez que não é possível determinar a posição da partícula com precisão arbitrária, recorre-se à estatística.

Muito embora experimentalmente *inacessível*, assume-se que a posição da partícula (e a partícula em si) *sempre* existe — um pressuposto necessário à *ontologia* Bohmiana [48]. Isso confere à MB o *status* de *teoria realista* [33], uma vez que esse objeto físico existe com valor bem definido independentemente da medição (ou de ser observado). Afirma-se, portanto, que a posição da partícula é um elemento de realidade *primário*, no sentido de satisfazer CSER e por fazê-la *por hipótese* (cf. subseção 2.3.1).

Por fim, vale apresentar um corolário bastante útil na MB [51]: *As trajetórias não cruzam o mesmo ponto.* A prova é por contradição. Suponha, então, dois campos de velocidades distintos $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ com mesmo valor sobre o ponto \mathbf{x} no mesmo instante t , i.e., $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, t)$. Sabemos que esses devem derivar de funções distintas, por exemplo $\psi_1(\mathbf{x}, t)$ e $\psi_2(\mathbf{x}, t)$, respectivamente. Se ambas as funções são soluções da *mesma* equação de Schrödinger, essas devem diferir ao máximo por uma

⁵ A distribuição de posições iniciais Bohmianas aproxima-se da densidade de probabilidade $|\psi(\mathbf{x}, t_0)|^2$ na medida em que o tamanho do ensemble aumenta; da mesma forma como as frequências relativas (vide subseção 2.1.2) aproximam-se das respectivas probabilidades.

fase global independente da posição, isto é,

$$S_2(\mathbf{x}, t) = S_1(\mathbf{x}, t) + \theta(t). \quad (3.13)$$

Mas, ao tomar o gradiente, conforme (3.9), encontramos que $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$.

3.1.1 Estados Estacionários

Em estados estacionários a função de onda oscila harmonicamente com o tempo e pode ser escrita como:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (3.14)$$

Nesse caso, a equação de Hamilton-Jacobi quântica (3.8) nos fornece, diretamente, a energia E do sistema,

$$E = (\nabla S)^2/2m + \mathcal{V} + Q. \quad (3.15)$$

Para exemplificar, considere o estado fundamental do átomo de hidrogênio. A parte espacial $\varphi(\mathbf{x})$ claramente é uma função real e, conseqüentemente, S e $\mathbf{p} = \nabla S$ serão nulos em todo espaço. Fisicamente, isso significa que o elétron está parado independentemente da sua posição, o que é bastante contraintuitivo, pois espera-se, inclusive para qualquer corpo sujeito a um potencial atrativo, que o equilíbrio seja dinâmico, i.e., que a força centrífuga cancele a força atrativa do potencial \mathcal{V} —quando considera-se um referencial não-inercial que está no próton e gira acompanhando a linha que liga o próton ao elétron. Contudo esse não é o caso aqui, pois o que cancela as variações espaciais do potencial clássico, garantindo que a energia total seja constante $E = \mathcal{V} + Q$, é o potencial quântico.

3.1.2 Partícula livre em uma dimensão

A descrição usual da MQ prevê que a velocidade de uma partícula livre, descrita pela função de onda ψ , é constante e dada por $v = \bar{v} \pm \Delta_v$, em que \bar{v} e Δ_v são, respectivamente, o valor médio e desvio padrão da velocidade associados à densidade de probabilidade $|\psi|^2$. Ou seja, a velocidade, para distribuições de largura finita, não é arbitrariamente precisa, uma vez que, pelo princípio da incerteza, $\Delta_v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta_x}$, na qual Δ_x é o desvio padrão da posição⁶. Ademais, a velocidade é constante, posto que, por hipótese, o sistema está livre de forças, e, portanto, o movimento será retilíneo e uniforme, em pleno acordo com a intuição clássica.

Por outro lado, de acordo com a interpretação Bohmiana, se a função de onda é descrita por um pacote gaussiano de largura finita, a cinemática em geral não será retilínea e uniforme e tampouco coincidirá com a trajetória clássica⁷ — mais precisamente, a trajetória Bohmiana diverge da clássica por um fator proporcional à distância relativa entre o centróide e a posição inicial da partícula. Como veremos na sequência, a partícula inicialmente move-se com \bar{v} ; depois é acelerada; e, por fim, segue com uma velocidade v' diferente de \bar{v} — reflexo direto da taxa de alargamento do pacote Δ_x/Δ_{x_0} ao longo do tempo.

⁶ A velocidade só teria precisão arbitrária se a posição da partícula fosse totalmente deslocalizada $\Delta_x \rightarrow \infty$.

⁷ O teorema de Ehrenfest prevê que os valores esperados dos observáveis canônicos P e X satisfazem equações muito semelhantes àquelas satisfeitas pelas respectivas variáveis clássicas: as equações canônicas de Hamilton. Na verdade, essas são idênticas se $\langle \nabla V(X) \rangle = [\nabla V(x)]_{x=\langle X \rangle}$, portanto, sob essas condições as trajetórias dos valores médios coincidem com aquelas previstas classicamente. Esse é o caso da partícula livre e da sujeita a um potencial linear.

Como de praxe, começamos identificando o campo físico associado ao sistema (i.e., à função de onda ψ), no caso, a partícula livre. Optamos, por conveniência das equações (3.9), (3.10) e (3.11), pela representação polar da função de onda

$$\psi \equiv \psi(x, t) = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}, \quad \rho = |\psi(x, t)|^2, \quad S = S(x, t), \quad (3.16)$$

em que, conforme desenvolvido em seção 2.2,

$$\rho = \frac{e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\Delta_x^2}}}{\sqrt{2\pi\Delta_x^2}}, \quad \bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{v}_0 t, \quad \Delta_x = \Delta_{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \quad (3.17)$$

e

$$S = \frac{\hbar^2 t}{8m\Delta_x^2\Delta_{x_0}^2} (x - \bar{x})^2 + \bar{p}_0 (x - \bar{x}) + \frac{\bar{p}_0^2}{2m} t - \frac{\hbar}{2} \arctan\left(\frac{\hbar t}{2m\Delta_{x_0}^2}\right), \quad (3.18)$$

na qual \bar{p}_0 é o momento médio do pacote (2.15). Desta, obtém-se o campo de velocidades,

$$v(x, t) = \frac{\partial_x S}{m} = \frac{\hbar^2 t}{4m^2\Delta_x^2\Delta_{x_0}^2} (x - \bar{x}) + \frac{\bar{p}_0}{m}, \quad (3.19)$$

e daquela o campo de forças,

$$F^{[\psi]} = -\partial_x Q = -\partial_x \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right) = \hbar^2 \frac{(x - \bar{x})}{4m\Delta_x^4}, \quad (3.20)$$

das quais fica evidente, respectivamente, que, inicialmente, qualquer partícula move-se juntamente com o valor esperado $\dot{x}(0) = v(x(0), 0) = \bar{p}_0/m = \bar{v}_0$, bem como que qualquer partícula com posição diferente de \bar{x} estará sujeita a uma força, que decresce em intensidade com o tempo através de Δ_x .

Outro ponto notório em (3.20) e que será relevante na análise do nosso estudo de caso é sua divergência com x . Isto é, a força sobre a partícula, oriunda do potencial quântico, é tanto maior quanto mais distante essa estiver da sua posição média \bar{x} , tendendo ao infinito quando $x \gg \bar{x}$. Contudo, esse cenário *tipicamente* não ocorre, pois *raramente* a partícula está longe do centróide \bar{x} , afinal a probabilidade decresce exponencialmente com a distância relativa a este, i.e. $\lim_{(x-\bar{x}) \rightarrow \infty} \rho = 0$

Vejamos, agora, qual o ensemble de trajetórias associado à partícula livre. Para tanto, basta integrar (3.19) ao longo da trajetória arbitrária $x(t)$, isto é, resolver a seguinte equação diferencial de primeira ordem,

$$\dot{x} = \frac{\hbar^2 t}{4m^2\Delta_x^2\Delta_{x_0}^2} (x - \bar{x}) + \dot{\bar{x}}, \quad (3.21)$$

obtendo:

$$x(t) = \bar{x} + \frac{\Delta_x}{\Delta_{x_0}} [x(0) - \bar{x}_0], \quad (3.22)$$

na qual $x(0)$ é a posição inicial aleatória da partícula⁸, distribuída de acordo com $|\psi(x, 0)|^2$ (para mais detalhes consulte seção A.1). Formalmente, a expressão acima define uma família de curvas parametrizadas pela condição inicial. Repare que, exceto pelo caso $x(0) = \bar{x}_0$, as trajetórias Bohmianas divergirão das clássicas, dadas por \bar{x} , pelo segundo termo — o que faz sentido, uma vez que a

⁸ A variável “oculta” desse problema.

força sobre a partícula $F(x(t), t)$ também se anula nesse caso. Em suma, para qualquer condição inicial diferente da mais esperada, a partícula estará sujeita a uma força e sua trajetória será, portanto, diferente da trajetória clássica. Embora acelerada, veremos que a trajetória aproximadamente pode exibir comportamentos retilíneos.

Para ratificar a influência da taxa de alargamento Δ_x/Δ_{x_0} na cinemática acima observe como (3.22) pode ser reescrito em cada um dos limites descritos em seção 2.2. Para instantes iniciais (i.e., quando $t \ll \tau$), $\Delta_x \approx \Delta_{x_0}$ e

$$x(t) \approx \bar{v}_0 t + x(0). \quad (3.23)$$

Apesar das trajetórias serem todas retilíneas, apenas em média (3.23) será equivalente à trajetória clássica. Para $t \approx \tau$, $\Delta_x \approx \Delta_{x_0} \left[1 + (t/\sqrt{2}\tau)^2 \right]$ e

$$x(t) \approx \bar{v}_0 t + x(0) + \frac{[x(0) - \bar{x}_0]}{\tau^2} \frac{t^2}{2}, \quad (3.24)$$

das quais percebemos que $\frac{[x(0) - \bar{x}_0]}{\tau^2}$ tem dimensão de aceleração, indicando que as trajetórias divergirão de (3.23). Por fim, para tempos grandes (comparativamente com τ), $\Delta_x \approx \hbar t / 2m\Delta_{x_0} = t/\tau$ e

$$x(t) \approx \bar{x} + \frac{[x(0) - \bar{x}_0]}{\tau} t, \quad (3.25)$$

em que $\frac{[x(0) - \bar{x}_0]}{\tau}$ tem dimensão de velocidade, indicando que o movimento volta a ser retilíneo, embora só seja equivalente ao clássico em média.

Vale destacar que a análise acima é facilmente estendida para uma partícula imersa em um potencial gravitacional $\mathcal{V} = gx$. Nesse caso, os campos de velocidade e força diferem de (3.19) e (3.20) apenas pelos valores médios da posição e do momento — isto é, em vez de $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{v}_0 t$, teríamos $\bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{v}_0 t + gt^2/2m$ e, no lugar de \bar{p}_0 , teríamos $\bar{p} = gt$. Assim, obteríamos o seguinte ensemble de trajetórias:

$$x(t) = \bar{x} + \frac{\Delta_x}{\Delta_{x_0}} [x(0) - \bar{x}_0], \quad \bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{v}_0 t + \frac{gt^2}{2m}, \quad \Delta_x = \Delta_{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar t}{2m\Delta_{x_0}^2} \right)^2}. \quad (3.26)$$

Em suma, a narrativa Bohmiana nos revela que a partícula ganha velocidade na medida em que o pacote se espalha, numa taxa tanto maior quanto mais distante do centróide for a posição inicial. Essa conclusão é bastante distinta da previsão ortodoxa que prevê uma velocidade constante e incerta, cuja incerteza Δ_v refere-se à largura Δ_{x_0} do pacote inicial via princípio de incerteza: $\Delta_v \geq \frac{\hbar}{2m\Delta_x}$.

3.1.3 Dupla fenda

Com o objetivo de solucionar o paradoxo encontrado no experimento da dupla fenda de Young (ora o elétron comporta-se como partícula ora como onda), formulou-se o princípio da dualidade onda-partícula: *os aspectos corpusculares e ondulatórios são inseparáveis* [29]. Ou seja, uma entidade física como o elétron, por exemplo, comporta-se como onda *ou* como partícula a depender do experimento e, nesse sentido, entendê-lo apenas como corpúsculo (ou apenas como onda) seria persistir em uma dicotomia clássica insustentável no domínio quântico. Desse modo, não haveria espaço na MQ para uma ontologia corpuscular como a MB. Veremos, contudo que o princípio acima

não é necessário para explicar o experimento, demonstrando-se que é possível interpretá-lo a partir de partículas e ondas.

Relembremos o experimento da dupla fenda. Esse consiste na preparação de um feixe de elétrons que incide sobre uma placa opaca, com duas aberturas estreitas (\mathbb{F}_1 e \mathbb{F}_2), pelas quais o feixe pode passar. Após interagirem com a placa, os elétrons têm as suas posições mensuradas por meio de um anteparo. Dentro dessa montagem, podemos: 1) deixar apenas uma das fendas aberta, ou 2) deixar ambas abertas. No primeiro caso, se fecharmos $\mathbb{F}_{1(2)}$ veremos um padrão $|\psi_{2(1)}|^2$ referente à fenda $\mathbb{F}_{2(1)}$. Agora, no segundo caso, observa-se um padrão de interferência no anteparo detector. Em especial, nota-se que tal padrão não corresponde à soma dos casos anteriores, i.e., $|\psi|^2 \neq |\psi_2|^2 + |\psi_1|^2$.

O paradoxo aparece quando atrela-se um único aspecto ao elétron. Por exemplo, no caso 2), se esse fosse uma partícula, esperar-se-ia que esse passasse apenas por uma das fendas em cada realização — o que estatisticamente corresponde à probabilidade de passar pela esquerda $|\psi_1|^2$ ou pela direita $|\psi_2|^2$, i.e., $|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2$. Contudo, o que se observa é a distribuição de probabilidade associada à passagem pelas duas fendas simultaneamente $|\psi_2|^2 + |\psi_1|^2 + \psi_2^* \psi_1 + \psi_1^* \psi_2$, o padrão esperado para uma onda. Assim, ao menos nessa situação, deveríamos visualizar o elétron como onda, em pleno desacordo com a ontologia Bohmiana.

Vejamos como a MB contorna tal conclusão. Primeiramente, a fim de ratificar os resultados experimentais — i.e. reproduzir $|\psi|^2$ a partir do ensemble de trajetórias — é fundamental que a cinemática da partícula não seja clássica e tampouco retilínea, condições as quais já observamos para a partícula livre na seção anterior. Em segundo lugar, é necessário que a dinâmica da partícula que passou pela fenda da direita, a título de exemplo, dependa tanto do ramo da função de onda associado à \mathbb{F}_1 como daquele associado à \mathbb{F}_2 ; o que, conforme veremos na sequência, é atendido pelo potencial quântico. A seguir, veremos com mais detalhes como isso se dá no limite de Huygens (ou colisional) [47, 51] e no de Fraunhofer (ou dispersivo) [45, 48].

3.1.3.1 Limite colisional

Considere, para tanto, a seguinte superposição

$$\psi(x, t) = \frac{\psi_1 + \psi_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.27)$$

Com ψ_k na forma polar,

$$\psi_k \equiv \psi_k(x, t) = \sqrt{\rho_k} e^{iS_k/\hbar}, \quad \rho_k = |\psi_k(x, t)|^2, \quad S_k = S_k(x, t), \quad (3.28)$$

nas quais $k = 1, 2$. O campo de velocidades (3.9) expressa-se como:

$$\begin{aligned} v^{[\psi]} = & \frac{1}{m} \frac{\rho_1 \partial_x S_1 + \rho_2 \partial_x S_2 + \sqrt{\rho_1 \rho_2} \partial_x (S_1 + S_2) \cos \varphi}{\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1 \rho_2} \cos \varphi} \\ & + \frac{\hbar}{m} \frac{(\sqrt{\rho_1} \partial_x \sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_2} \partial_x \sqrt{\rho_1}) \sin \varphi}{\rho_1 + \rho_2 + 2\sqrt{\rho_1 \rho_2} \cos \varphi} \end{aligned} \quad (3.29)$$

com $\varphi = (S_2 - S_1)/\hbar$. Percebe-se quanto à troca de índices (par e ímpar, respectivamente), a partir da paridade do primeiro e segundo termos, que este carrega contribuições relativas à assimetria da superposição (pois, caso essa seja simétrica $S_1 = S_2$ ou $\rho_1 = \rho_2$, os índices serão irrelevantes e o

termo se anula); e aquele as contribuições individuais de cada pacote, bem como da interferência, no termo proporcional à $\rho_1\rho_2$ — só significativo quando há sobreposição dos pacotes.

Agora, vejamos com mais detalhe o limite colisional $t \ll \tau$. Para tanto, considere os seguintes pacotes Gaussianos $\psi_k = \sqrt{G_\Delta(x \pm \bar{x})} e^{\frac{i}{\hbar} S_k(x \pm \bar{x}, t)}$, tal que

$$S(x, t) = \frac{\hbar^2 t}{8m\Delta^2\Delta_0^2} x^2 + \bar{p}_k x + \frac{\bar{p}_k^2}{2m} t - \frac{\hbar}{2} \arctan\left(\frac{\hbar t}{2m\Delta_0^2}\right), \quad \bar{x} = \bar{x}_0 + \bar{v}_0 t, \quad (3.30)$$

nas quais: para $k = 1(2)$, usamos o sinal $+$ ($-$) e $\bar{p}_k = \bar{p}_0(-\bar{p}_0)$. Lembrando que $G_\Delta(x \pm \bar{x})$ é uma Gaussiana centrada em \bar{x} com largura Δ .

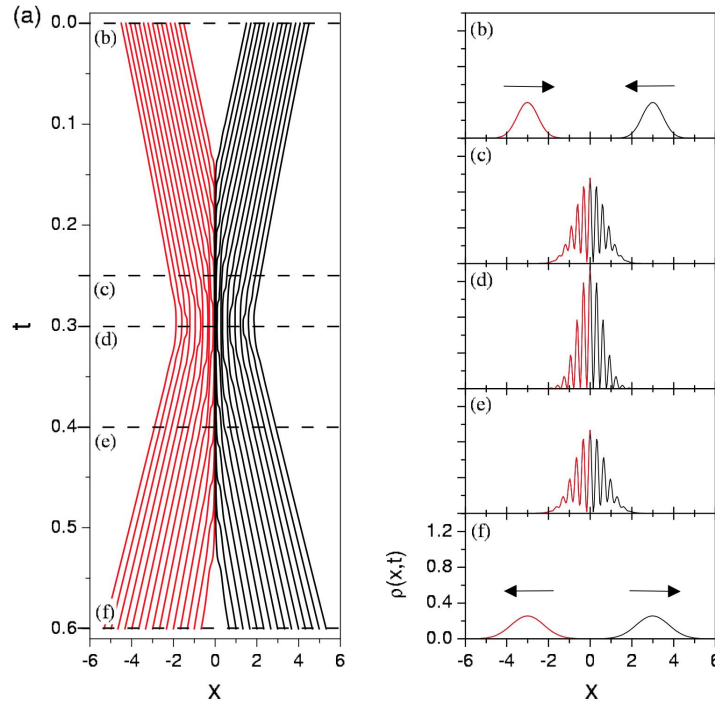


Figura 3.1 – À esquerda: trajetórias Bohmianas associadas à superposição de dois pacotes Gaussianos com velocidades contrárias (3.27) com $\tau = 10$. À direita: Instantâneos ilustrando a evolução temporal da superposição (3.27) nos instantes indicados pelas linhas verticais da figura da esquerda. A cor vermelha (preta) refere-se ao pacote inicialmente à esquerda (direita) da origem. A interferência máxima ocorre em $t_i = 0.3$. Figura retirada de [47].

Começamos pela interpretação usual, mesmo que essa não fale explicitamente de trajetórias. Ela nos induz a acreditar, pela cinemática do valor médio, que, caso a partícula esteja inicialmente à esquerda da origem (na região I_1 , definida pelo intervalo \mathbb{R}^-), em algum instante futuro essa estará à direita (na região I_2 , definida pelo intervalo \mathbb{R}^+) — sugerindo portanto que as trajetórias cruzam o *eixo de simetria* $x = 0$. Contudo, como ilustrado na Figura 3.1, isso é proibitivo segundo a interpretação causal, a qual prevê que: se em dada realização a partícula está inicialmente à esquerda, essa se aproximará da origem no instante de interferência máxima t_i e, então, seguirá com *sentido contrário*. Isso fica evidente quando constatamos que o campo de velocidades (3.29) é *nulo* na origem para qualquer instante de tempo, ou seja, "não há qualquer fluxo de probabilidades entre as regiões I_1 e I_2 "[51]. Logo, as partículas cujas condições iniciais pertencem ao intervalo $I_{1(2)}$ *jamais cruzarão o eixo de simetria* e tampouco estarão na região $I_{2(1)}$ — o que justifica a cor vermelha (preta) do pacote na Figura 3.1.

Concluimos anteriormente que o conjunto de partículas inicialmente no semi-eixo negativo (positivo) permanecem sobre o mesmo eixo indefinidamente — ou seja, não cruzam a origem. Todavia, como verifica-se em Figura 3.1, suas trajetórias para $t \gg t_i$ aproximam-se daquelas que inicialmente estavam à direita (esquerda), sugerindo o contrário, i.e., que existe sim um cruzamento. A aparente contradição se dissolve ao notarmos que, após a interferência, a partícula à esquerda passa a ser guiada pela função de onda inicialmente à direita, afinal, os pacotes cruzam a origem, de modo que a sua trajetória assintoticamente será equivalente à do pacote ψ_2 .

Para verificar isso analiticamente, repare-se que, para os pacotes escolhidos, o segundo termo de (3.29) será proporcional ao termo de interferência $\sqrt{\rho_1 \rho_2}$, pois $\sqrt{\rho_{k'}} \partial_x \sqrt{\rho_k} = (x \pm \bar{x}) \sqrt{\rho_k \rho_{k'}}$ em que $k' \neq k = 1, 2$. Assim, inicialmente, quando $\sqrt{\rho_1 \rho_2} \approx 0$, (3.29) é aproximadamente:

$$v^{[\psi]} \approx \frac{1}{m} \frac{\rho_1 \partial_x S_1 + \rho_2 \partial_x S_2}{\rho_1 + \rho_2}. \quad (3.31)$$

e os campos inicialmente associados ao conjunto da esquerda $v_1^{[\psi]}(x, t) \equiv v_1^{[\psi]}$, com $x \in I_1$, e da direita $v_2^{[\psi]}(x, t) \equiv v_2^{[\psi]}$, com $x \in I_2$, serão:

$$v_1^{[\psi]} \approx v_1^{[\psi_1]} \approx \partial_x S_1 / m \quad \text{e} \quad v_2^{[\psi]} \approx v_2^{[\psi_2]} \approx \partial_x S_2 / m, \quad (3.32)$$

pois $\rho_{1(2)}(x, 0) = 0 \forall x \in I_{2(1)}$.

Agora, para $t \gg t_i$, também não haverá aproximadamente interferência, mas a situação inverte-se, i.e.,

$$\rho_{1(2)}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in I_{1(2)}, \quad (3.33)$$

visto que as trajetórias não cruzam o eixo de simetria, como anteriormente argumentado. Logo, os campos associados às partículas inicialmente à esquerda I_1 e à direita I_2 da origem passam a ser, respectivamente:

$$v_1^{[\psi]} \approx v_1^{[\psi_2]} \approx \partial_x S_2 / m \quad \text{e} \quad v_2^{[\psi]} \approx v_2^{[\psi_1]} \approx \partial_x S_1 / m. \quad (3.34)$$

3.1.3.2 Limite dispersivo

No caso dispersivo, embora os pacotes sejam inicialmente localizados e o campo de velocidades dado aproximadamente por (3.31), assintoticamente não o serão, de modo que não podemos mais desprezar os termos proporcionais à $\rho_1 \rho_2$ em (3.29), dificultando a solução analítica. No entanto, pode-se recorrer às soluções numéricas para um conjunto finito de trajetórias, como a disposta na Figura 3.2. Dessa, percebemos que as trajetórias são mais numerosas nas regiões que correspondem às franjas do padrão de interferência. Isso porque o ensemble de trajetórias é aproximadamente ψ -distribuído inicialmente, de modo que, pela equivariância, o será para todo instante, inclusive quando encontra o aparato detector.

O experimento de interferência de elétrons com sua interpretação usual sugere que no domínio quântico é necessário abandonar os ideais clássicos de partícula e onda e substituí-los por uma noção dual, complementar: o princípio da dualidade onda-partícula. Vimos, contudo que essa não é a única explicação. Na verdade, mostramos acima que é possível sim conceber o elétron, que interage com a dupla fenda e posteriormente tem sua posição detectada, sempre como uma partícula, com posição e evolução bem definidas. Contudo, é fundamental compreender que a cinemática não

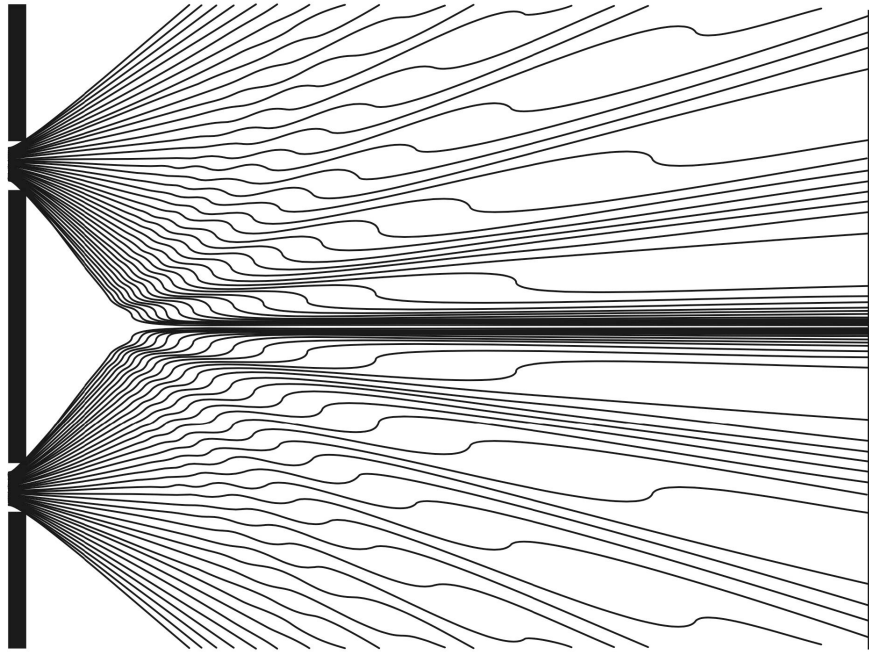


Figura 3.2 – Trajetórias Bohmianas associadas à superposição de dois pacotes Gaussianos com velocidades contrárias (3.27) no regime dispersivo. Figura retirada de [48], primeiramente publicada em [52].

será clássica, e, além disso, dependerá fortemente de regiões longínquas através do campo ψ . Em particular, a trajetória dependerá de as duas fendas estarem abertas ou apenas uma. Se aquele for o caso, então a cinemática é a de uma partícula livre, descrita na seção anterior; contudo, se este for o cenário, então, embora a partícula passe por apenas uma fenda em cada realização, a onda passa pelas duas, e a influenciará conforme. Em suma, pode-se dizer que na MB existe uma dualidade onda-partícula no sentido literal: "existe uma onda e existe uma partícula"[53].

3.2 Mecânica Bohmiana para duas partículas

Como vimos anteriormente, ψ tem um papel central na dinâmica Bohmiana, pois representa um campo físico que governa as trajetórias. O mesmo procede para a função de onda associada a um sistema de muitos corpos, porém esta será definida no espaço de configuração $\mathbb{R}^{3N} \times \mathbb{R}$ — em que N é o número de partículas envolvidas e no qual cada direção está associada ao vetor posição de uma partícula —, enquanto para aquela o domínio era simplesmente $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Veremos que isso, somado ao fato de que existe emaranhamento entre os graus de liberdade das diferentes partículas, contribuirá para uma dinâmica explicitamente não-local, no sentido de violar o princípio de localidade (apresentado na seção subseção 2.3.1). A seguir generalizaremos as equações de movimento apresentadas na seção 3.1 para um sistema composto por duas partículas \mathcal{A} e \mathcal{B} com massas m_a e m_b e posições \mathbf{x}_a e \mathbf{x}_b , enfatizando os seus aspectos não-locais.

Para obtermos as equações Bohmianas de um sistema composto por 2 partículas, procede-se de maneira análoga àquela realizada na seção 3.1, isto é, separa-se a parte real e imaginária da equação de para duas partículas sujeitas a um potencial arbitrário \mathcal{V} ,

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m_a}\nabla_a^2 - \frac{\hbar^2}{2m_b}\nabla_b^2 + \mathcal{V} \right)\psi, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t), \quad (3.35)$$

a partir da função de onda na forma polar

$$\psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t) = \sqrt{\rho} e^{iS/\hbar}, \quad \rho = |\psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t)|^2, \quad S = S(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t). \quad (3.36)$$

Assim, obtemos a equação de HJQ,

$$\partial_t S + \frac{(\nabla_a S)^2}{2m_a} + \frac{(\nabla_b S)^2}{2m_b} + V + Q^{[\psi]} = 0, \quad Q^{[\psi]} = \frac{-\hbar^2}{2\sqrt{\rho}} \left(\frac{\nabla_a^2 \sqrt{\rho}}{m_a} + \frac{\nabla_b^2 \sqrt{\rho}}{m_b} \right), \quad (3.37)$$

a generalização de (3.8) para as partículas \mathcal{A} e \mathcal{B} , com campos de momentos $\nabla_a S \equiv \mathbf{v}_a^{[\psi]}$ e $\nabla_b S \equiv \mathbf{v}_b^{[\psi]}$ respectivamente, nas quais $\nabla = (\nabla_a, \nabla_b)$; e a de continuidade,

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}^{[\psi]}) = -\nabla_a \cdot (\rho \mathbf{v}_a^{[\psi]}) - \nabla_b \cdot (\rho \mathbf{v}_b^{[\psi]}) \quad (3.38)$$

que, como anteriormente, expressa a conservação local de probabilidade, mas agora para uma densidade de probabilidade definida no espaço de configuração equipado $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$, no lugar de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. Em síntese, cada direção está associada a uma partícula e a um operador Nabla.

Repare que, apesar da fase depender das duas coordenadas $S = S(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t)$, o momento é computado a partir das variações espaciais associadas à coordenada de uma única partícula. Regra semelhante se aplica aos campos das velocidades,

$$\mathbf{v}_k^{[\psi]} \equiv \mathbf{v}_k^{[\psi]}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t) = \frac{\hbar}{m_k} \text{Im} \left(\frac{\nabla_k \psi}{\psi} \right) \quad (3.39)$$

e aos das forças,

$$\mathbf{F}_k^{[\psi]} \equiv \mathbf{F}_k^{[\psi]}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t) = -\nabla_k (\mathcal{V} + Q^{[\psi]}) \quad (3.40)$$

associados ao sistema k , em que $k = a, b$. Portanto, em geral, a velocidade $\mathbf{v}_k^{[\psi]}[\mathbf{x}_a(t), \mathbf{x}_b(t), t]$ da partícula k e a força $\mathbf{F}_k^{[\psi]}[\mathbf{x}_a(t), \mathbf{x}_b(t), t]$ sobre ela dependerão da configuração atual de todo sistema $(\mathbf{x}_a(t), \mathbf{x}_b(t))$ naquele instante (na seção seguinte, associaremos a essa dependência um caráter não-local). Caso o estado seja separável, essa dependência desaparece.

3.2.1 Não-Localidade e separabilidade

Embora haja grande similaridade entre o formalismo de uma única partícula e o acima desenvolvido, este conta com interações explicitamente não-locais oriundas do potencial $Q^{[\psi]}$ e da força que dele deriva. A seguir, veremos como isso procede e qual a sua relação com o emaranhamento (seção 2.4) do estado⁹.

Como podemos ver em (3.37), ou mesmo em (3.10), o potencial quântico depende da *forma* da função de onda. Isso porque, contém $|\psi|$ tanto em seu numerador como em seu denominador, ou seja, o potencial quântico é proporcional as variações da amplitude $|\psi|$ no espaço de configuração. Como vimos no experimento da dupla fenda subseção 3.1.3, isso implica que a dinâmica da partícula está fortemente relacionada a características longínquas do ambiente.

Agora, para sistemas com muitos corpos, além dessa característica, há na força (3.40) uma dependência com a configuração instantânea do sistema $[\mathbf{x}_a(t), \mathbf{x}_b(t)]$, de maneira que a dinâmica

⁹ Aqui empregado no sentido ortodoxo, subseção 2.1.2.

do subsistema depende instantaneamente do restante do sistema — como deixa clara a segunda lei de newton para a partícula \mathcal{B} , em um sistema com duas partículas (\mathcal{A} e \mathcal{B})

$$m_b \ddot{\mathbf{x}}_b = \mathbf{F}_b^{[\psi]}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b). \quad (3.41)$$

Ademais, como as posições são elementos de realidade temos na expressão acima uma violação clara do *princípio de localidade* (cf. subseção 2.3.1), uma vez que a aceleração $\ddot{\mathbf{x}}_b$ é afetada pela *dinâmica* de outro elemento de realidade distante.

Vejam como isso está associado ao emaranhamento. Considere, para tanto, duas partículas \mathcal{A} e \mathcal{B} livres, associadas às bases $\{|\mathbf{x}_a\rangle\}$ e $\{|\mathbf{x}_b\rangle\}$. Se o estado é separável $\rho = \rho_a \rho_b$ e puro, então esse será representado na posição pelo produto de duas funções de onda $\langle \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b | \rho | \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \rangle = \psi_a(\mathbf{x}_a, t) \psi_b(\mathbf{x}_b, t)$, cuja representação polar de cada uma será $\psi_k(\mathbf{x}_k, t) = \sqrt{\rho_k} e^{iS_k/\hbar}$, com $k = a, b$. Substituindo-a na fórmula do potencial quântico em (3.8), vemos que o potencial separa-se em dois termos independentes, i.e.,

$$\begin{aligned} Q^{[\psi]} &= \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\sqrt{\rho_b} \nabla_a^2 \sqrt{\rho_a}}{m_a \sqrt{\rho_a \rho_b}} + \frac{\sqrt{\rho_a} \nabla_b^2 \sqrt{\rho_b}}{m_b \sqrt{\rho_a \rho_b}} \right) \\ &= Q^{[\psi_a]} + Q^{[\psi_b]}; \end{aligned} \quad (3.42)$$

e, portanto, ao derivá-lo em \mathbf{x}_a , para encontrar a força sobre a partícula \mathcal{A} , cancelamos o segundo, de modo que ficamos apenas com

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a^{[\psi]} &= -\nabla_a Q^{[\psi]} \\ &= -\nabla_a (Q^{[\psi_a]} + Q^{[\psi_b]}) \\ &= -\nabla_a Q^{[\psi_a]}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Percebemos que, para haver localidade na força, é suficiente que as amplitudes sejam fatoráveis $\rho = \rho_a \rho_b$, uma vez que $Q^{[\psi]}$ não depende da fase — quem depende é o campo de velocidades $\mathbf{v}^{[\psi]}$.

3.3 Formulações para Estados gerais

Uma aplicação interessante da MB surge no contexto de sistemas quânticos abertos — usualmente associados a um estado puro bipartido $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E)$, em que \mathcal{H}_S é o espaço associado ao sistema de interesse e \mathcal{H}_E o espaço associado ao ambiente¹⁰. A fim de extrair informação útil sobre o sistema de interesse, computa-se o estado reduzido traçando fora os graus de liberdade do ambiente. Em [54, 55], os autores definem um campo de velocidades associado a esse estado e demonstram que as respectivas trajetórias, no experimento da dupla fenda¹¹, cruzam o eixo de simetria, na medida em que a descoerência aumenta, fazendo com que o padrão de interferência gradualmente desapareça, conforme demandam as previsões estatísticas da MQ.

A seguir, obteremos esse campo para o sistema bipartido $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$, com estados reduzidos $\rho_B = \text{Tr}_A(\rho)$ (o subsistema de interesse) e $\rho_A = \text{Tr}_B(\rho)$ (o ambiente). Como

¹⁰ Em geral, considera-se que o ambiente tem muitos graus de liberdade, comparativamente ao número de graus do sistema de interesse.

¹¹ No qual o elétron (sistema de interesse) interage com moléculas de ar (ambiente), por exemplo.

anteriormente, $\mathcal{S} = \mathcal{A}, \mathcal{B}$ denota o subsistema associado à partícula de massa m_s que se move ao longo do eixo \mathbf{x}_s e $s = a, b$. Para tanto, considere a seguinte notação para distribuições:

$$\begin{aligned}\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b} &\equiv \langle \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b | \rho | \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b \rangle = \psi^*(\mathbf{x}'_a, \mathbf{x}'_b) \psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b), & \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} &\equiv \langle \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b | \rho | \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \rangle = |\psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)|^2, \\ \rho_{\mathbf{x}_a} &\equiv \langle \mathbf{x}_a | \rho_{\mathcal{A}} | \mathbf{x}_a \rangle, & \rho_{\mathbf{x}_b} &\equiv \langle \mathbf{x}_b | \rho_{\mathcal{B}} | \mathbf{x}_b \rangle,\end{aligned}\tag{3.44}$$

Para campos de velocidades vinculados à MB, temos

$$\mathbf{v}_b^{[\psi]} = \frac{\hbar}{m_b \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b}} \operatorname{Im} \left(\nabla_a \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}_b} \right)_{\mathbf{x}'_a = \mathbf{x}_a}, \tag{3.45}$$

onde ∇_b é a componente do operador $\nabla = (\nabla_a, \nabla_b)$ na direção \mathbf{x}_b (associada à partícula de interesse b), e $\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} = \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b}$, indicando que o estado gerador do campo é ρ . Veja-se que vale a regra estabelecida anteriormente: como não há menção explícita à dependência espacial, trata-se de um campo de velocidades em $\mathbb{R}^6 \times \mathbb{R}$, isto é, $\mathbf{v}_b^{[\psi]} = \mathbf{v}_b^{[\psi]}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, t)$. Além disso, note-se que

$$\left(\nabla_a \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b, \mathbf{x}'_a, \mathbf{x}_b} \right)_{\mathbf{x}'_a = \mathbf{x}_a} = \left[\nabla_a \psi^*(\mathbf{x}'_a, \mathbf{x}_b) \psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) \right]_{\mathbf{x}'_a = \mathbf{x}_a} = \psi^*(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) \nabla_a \psi(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b). \tag{3.46}$$

Ou seja, (3.45) é um mero rearranjo da expressão do campo de velocidades (3.39), definida na seção 3.2, a fim de acomodar matrizes densidade.

Embora a regra de Bayes não possa ser demonstrada para distribuições de probabilidades quânticas, dadas as bem-definidas distribuições (3.44), poderemos sempre optar por usar uma das seguintes *densidades de probabilidades condicionais*

$$\rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b} := \frac{\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b}}{\rho_{\mathbf{x}_b}}, \quad \rho_{\mathbf{x}_b | \mathbf{x}_a} := \frac{\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b}}{\rho_{\mathbf{x}_a}}, \tag{3.47}$$

sempre tomando cuidado para não validar, acidentalmente, a regra de Bayes — com outras palavras não se pode, a partir das definições acima, concluir que $\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} = \rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b} \rho_{\mathbf{x}_b} = \rho_{\mathbf{x}_b | \mathbf{x}_a} \rho_{\mathbf{x}_a}$. Usaremos, por razões técnicas, a primeira, caso contrário, não conseguiríamos fazer as simplificações subsequentes desejadas.

Lembrando que ρ é um operador densidade puro bipartido, a ideia agora é traçar o sistema \mathcal{A} e verificar qual o efeito deste descarte na parte \mathcal{B} . Partindo da equação de continuidade (3.38),

$$\partial_t \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} = -\nabla_a \cdot \left(\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} \mathbf{v}_a^{[\psi]} \right) - \nabla_b \cdot \left(\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} \mathbf{v}_b^{[\psi]} \right), \tag{3.48}$$

fazemos integrações em \mathbf{x}_a usando $\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} = \rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b} \rho_{\mathbf{x}_b}$,

$$\int d\mathbf{x}_a \partial_t \rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b} \rho_{\mathbf{x}_b} = - \int d\mathbf{x}_a \nabla_a \cdot \left(\rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b} \rho_{\mathbf{x}_b} \mathbf{v}_a^{[\psi]} \right) - \int d\mathbf{x}_a \nabla_b \cdot \left(\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} \mathbf{v}_b^{[\psi]} \right), \tag{3.49}$$

e colocando as derivadas parciais independentes de \mathbf{x}_a para fora das integrais, obtemos pela normalização de $\rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b}$:

$$\partial_t \rho_{\mathbf{x}_b} = -\nabla_b \cdot \left(\rho_{\mathbf{x}_b} \left\langle \mathbf{v}_b^{[\psi]} \right\rangle_{\mathbf{x}_b} \right) \tag{3.50}$$

com

$$\left\langle \mathbf{v}_b^{[\psi]} \right\rangle_{\mathbf{x}_b} := \int d\mathbf{x}_a \rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b} \mathbf{v}_b^{[\psi]}. \tag{3.51}$$

Note-se que se havésssemos escolhido a segunda equação em (3.47), teríamos $\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} = \rho_{\mathbf{x}_b | \mathbf{x}_a} \rho_{\mathbf{x}_a}$ que impossibilitaria as simplificações acima. Em (3.49), o primeiro termo da continuidade resultou em

$$\int d\mathbf{x}_a \nabla_a \cdot (\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} \mathbf{v}_a^{[\psi]}) = \lim_{\pm \mathbf{x}_a \rightarrow \infty} \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} \mathbf{v}_a^{[\psi]} = \lim_{\pm \mathbf{x}_a \rightarrow \infty} \rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b} \lim_{\pm \mathbf{x}_a \rightarrow \infty} \mathbf{v}_a^{[\psi]} = 0, \quad (3.52)$$

quando assume-se que $\rho_{\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b}$ decresce mais rapidamente que qualquer campo vetorial $\mathbf{v}_a^{[\psi]}$.

O termo $\langle \mathbf{v}_b^{[\psi]} \rangle_{\mathbf{x}_b}$ na equação (3.50) possui a interpretação de campo de velocidades por comparação direta com (3.48), pois, juntamente com $\rho_{\mathbf{x}_b}$, desempenha papel análogo à densidade de corrente $\rho \mathbf{v}^{[\psi]}$. É denominado *campo de velocidades reduzido*, pois, como veremos, é derivado do estado *reduzido* ρ_B .

Substituindo (3.45) em (3.51), encontra-se

$$\langle \mathbf{v}_b^{[\psi]} \rangle_{\mathbf{x}_b} = \frac{\hbar}{m_b \rho_{\mathbf{x}_b}} \text{Im}(\nabla_b \rho_{\mathbf{x}_b, \mathbf{x}'_b})_{\mathbf{x}'_b = \mathbf{x}_b} =: \mathbf{v}_b^{[\rho_B]}, \quad \rho_{\mathbf{x}_b, \mathbf{x}'_b} = \langle \mathbf{x}_b | \rho_B | \mathbf{x}'_b \rangle. \quad (3.53)$$

O que nos leva a concluir que, enquanto em (3.45) o gerador do campo de velocidades é o estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, aqui o gerador é o estado misto reduzido ρ_B — o que justifica conceitualmente a escolha realizada em (3.47), i.e., a probabilidade condicionada à \mathbf{x}_b é que está associada a dinâmica reduzida de b e não a densidade condicionada à \mathbf{x}_a , pois apenas $\rho_{\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b}$ permite a construção de um campo de velocidades, cujo gerador é o estado misto reduzido ρ_B .

Relembrando do experimento da dupla fenda, vemos que a existência de emaranhamento entre as partes \mathcal{A} e \mathcal{B} faz com que ρ_B seja um estado misto, isto é, uma mistura estatística sem os de interferência que apareciam no problema da dupla fenda com a partícula b , isolada de outras partículas. É justamente este fato que explica porque as trajetórias começam a se cruzar: temos agora um ensemble constituído de dois sub-ensembles independentes, um referindo-se a partículas que passaram pela fenda da esquerda e outro pela fenda da direita. Como não falam do mesmo cenário físico, tratam-se de trajetórias independentes (de fluidos diferentes) que se cruzam apenas porque colocamo-las na mesma representação estatística.

4 Não-localidade e o princípio de covariância

Este capítulo é dividido em duas partes: seção 4.1 e seção 4.2. Neste estuda-se a covariância das leis físicas na mecânica clássica, quântica e Bohmiana; e naquele quais os aspectos de NL presentes na dinâmica Bohmiana e como quantificá-los.

4.1 Referenciais materiais

Muito embora a premissa de que “referenciais são sistemas de coordenadas abstratos cuja dinâmica é imutável por princípio” (como se esses não fossem suscetíveis a interações físicas) seja uma boa aproximação na maioria das vezes está longe de ser a mais fundamental. Uma premissa mais fundamental é considerá-los como constituintes materiais de massa finita sujeitos às mesmas leis do sistema de interesse. O procedimento usual (e o qual usaremos neste capítulo na mecânica Newtoniana, quântica e Bohmiana) consiste em:

1. formular a dinâmica a partir de um referencial externo, cujas coordenadas são denominadas absolutas;
2. transformá-las para coordenadas relativas a um ente material; e, por fim,
3. abandonar as primeiras.

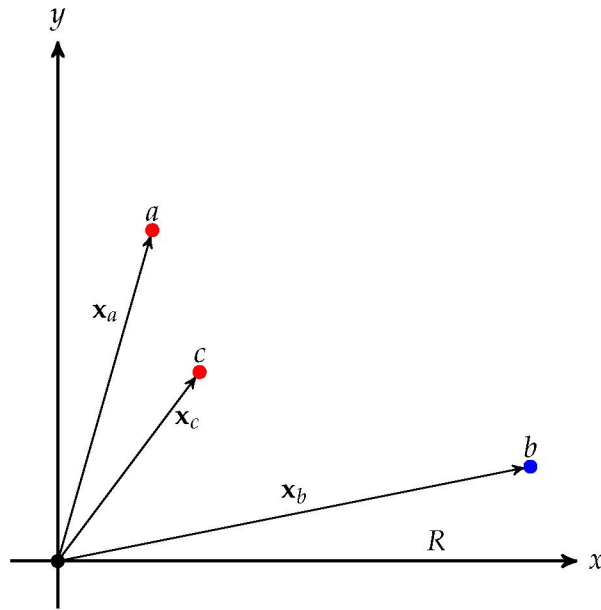
Assim, buscando compreender quais as principais características presentes nas leis de movimento oferecidas por um referencial interno com massa finita, iniciamos analisando a situação na MC (subseção 4.1.1), da qual explicitamos o caráter não-local das forças fictícias; passamos então para a interpretação ortodoxa da MQ (subseção 4.1.2), na qual encontramos as condições de equivalência para as descrições do referencial interno e externo deduzidas por [13]; por fim, as ratificamos segundo a MB (subseção 4.1.3).

4.1.1 Referenciais clássicos

Nesta seção iremos obter a descrição física de um referencial não-inercial segundo a MC, ou seja, obteremos a “segunda lei”¹ que esse prescreve para um sistema de interesse. Faremos como descrito acima: partiremos da segunda lei de Newton vista pelo éter, assumindo um sistema fechado (sem forças externas); transformado-as para as coordenadas relativas, nas quais evidenciaremos o surgimento de forças fictícias associadas a não-inercialidade do novo referencial. Veremos, por fim, que essas induzem o que chamaremos de não-localidade fictícia (NLF).

Consideremos um sistema com três partículas rotuladas por a , b e c com massas $m_{a,b,c}$. Iniciemos com uma descrição “segura” do ponto de vista de um referencial externo R — por definição, em repouso ou em movimento retilíneo em relação ao éter, no qual valem, portanto as leis de Newton — com coordenadas $\mathbf{x}_{a,b,c}$ conforme ilustra a Figura 4.1. A segunda Lei de Newton para a k -ésima

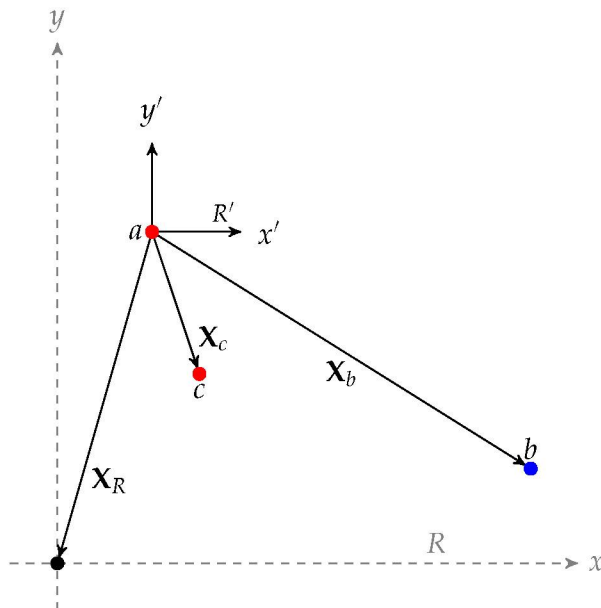
¹ Emprega-se o termo “segunda lei”, entre aspas, por alusão direta à *segunda lei de Newton*, muito embora esta, diferentemente daquela, vale apenas para referenciais inerciais.

Figura 4.1 – Partículas a , b e c relativas à R

partícula é

$$m_k \ddot{\mathbf{x}}_k = \sum_{k \neq i=a,b,c} \mathbf{F}_{ik} = \mathbf{F}_k, \quad (4.1)$$

na qual a força feita pela i -ésima partícula na k -ésima, denotada por $\mathbf{F}_{ik} = \mathbf{F}(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|)$, decresce com $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|$ e respeita, por hipótese, a *causalidade local relativística* (CLR)² — deriva de potenciais retardados, i.e., perturbações da posição \mathbf{x}_i só afetarão a k -ésima partícula em um intervalo de tempo superior à $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_k|/v$, em que v é a velocidade da luz no vácuo. Vale notar, também, que a força resultante \mathbf{F}_k sobre a partícula k decorre de interações entre corpos materiais e a partícula k .

Figura 4.2 – Referencial R e partículas b e c relativas à R' (ou partícula a)

² Ou localidade relativística.

Agora, vejamos como essa descrição distingue-se daquela oferecida por um referencial não-inercial R' , acelerado em relação à R . Dado o cenário acima, basta promover algumas das partículas a referencial. Escolhendo-se a partícula a , as novas coordenadas relativas (conforme ilustra a Figura 4.2) serão:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_a, \quad \mathbf{X}_R = -\mathbf{x}_a, \quad (4.2)$$

em que $i \neq a$ e \mathbf{X}_R é a origem do sistema de coordenadas antigos R que será abandonada, uma vez que estamos interessados na descrição de partículas materiais sujeitas a forças físicas reais. Derivando a nova coordenada \mathbf{X}_b no tempo e substituindo as equações (4.1), reescritas em termos de \mathbf{X}_j , temos:

$$\ddot{\mathbf{X}}_b = \frac{\mathbf{F}_b}{m_b} - \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} = \frac{\mathbf{F}_{ab} + \mathbf{F}_{cb}}{m_b} - \frac{\mathbf{F}_{ba} + \mathbf{F}_{ca}}{m_a} = \frac{\mathbf{F}_{ab}}{\mu} + \frac{\mathbf{F}_{cb}}{m_b} + \frac{\mathbf{F}_{ca}}{m_a}, \quad (4.3)$$

na qual usamos a terceira lei de Newton ($\mathbf{F}_{ba} = -\mathbf{F}_{ab}$) e a massa reduzida $\mu = \frac{m_a m_b}{m_a + m_b}$. Multiplicando-se pela massa reduzida e explicitando a dependência da força com as novas coordenadas, encontra-se a segunda lei para a partícula b do ponto de vista de a :

$$\mu \ddot{\mathbf{X}}_b = \mathbf{F}_{ab}(X_b) + \frac{m_a}{m_a + m_b} \mathbf{F}_{cb}(|\mathbf{X}_b - \mathbf{X}_c|) + \frac{m_b}{m_a + m_b} \mathbf{F}_{ca}(X_c), \quad (4.4)$$

em que $X_k = |\mathbf{X}_k|$.

Da equação (4.3), fica claro que a não-inercialidade do referencial, expressa por $\ddot{\mathbf{x}}_a \neq 0$, está diretamente associada ao surgimento de forças fictícias (segundo e terceiro termos em (4.4)) que contribuem para a aceleração $\ddot{\mathbf{X}}_b$. O termo fictício é empregado porque, diferentemente das forças físicas que compõem a força resultante na segunda lei de Newton, essas não decorrem da ação de outros corpos *sobre* a partícula de interesse — e tampouco são oriundas das quatro interações fundamentais³, ou seja, alguém sobre a partícula a não as saberia explicar. Na verdade, no exemplo acima, conforme verifica-se em (4.4), as forças fictícias que atuam em b de acordo como o novo referencial decorrem da ação de c e b sobre a — a força resultante sobre a partícula promovida a referencial.

Embora seja difícil imaginar um corpo em repouso em relação ao éter (e mais difícil ainda imaginar tal referencial inercial absoluto), isso não significa que estamos fadados a incluir forças fictícias em nossas equações de movimento. Isso porque, na prática, a massa do *sistema de interesse* é muito menor que a massa do referencial utilizado (e.g. a Terra ou o laboratório), de modo que tais referenciais são *aproximadamente* inerciais. Em nosso exemplo, se $m_a \gg m_{b,c}$, então, para todos os fins práticos, a partícula a será tão inercial quanto o éter — suas descrições serão aproximadamente equivalentes. Formalmente, a aceleração daquela $\ddot{\mathbf{x}}_a$ será muito pequena em comparação à aceleração do sistema de interesse $\ddot{\mathbf{x}}_b$, de modo que $\mu \approx m_b$, $\ddot{\mathbf{X}}_b \approx \ddot{\mathbf{x}}_b$ e $\mu \ddot{\mathbf{X}}_b \approx m_b \ddot{\mathbf{x}}_b$. Em síntese:

- Se a massa de uma partícula (que será promovida a referencial material) é muito maior do que a do sistema de interesse, então o referencial é aproximadamente inercial para esse sistema.

Dentre as componentes da força fictícia, aquelas que contribuem para a aceleração $\ddot{\mathbf{X}}_i$ e são da forma $\mathbf{F}_{jk} = \mathbf{F}_{jk}(|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_k|)$ com $i \neq k, j$ induzirão o que chamaremos de não-localidade fictícia NLF⁴.

³ Gravitacão, eletromagnética e nuclear forte e fraca

⁴ Ou não-localidade relativística.

Para compreender isso, suponha-se, por exemplo, que a posição da partícula c varie (abruptamente). Essa variação mudará o valor das forças \mathbf{F}_{cb} e \mathbf{F}_{ca} , e, concomitantemente, o valor da aceleração a qual b está sujeita do ponto de vista de R' , conforme expressa (4.3). Em outras palavras, b “saberá” que a configuração do sistema foi alterada, mas não saberá instantaneamente — pela hipótese de CLR, a informação sobre a mudança do sistema levará um tempo $t_{cb} \geq |\mathbf{X}_b - \mathbf{X}_c|/\nu$. Note-se, contudo, que o movimento de c também afeta b através da interação daquela com o referencial material \mathbf{F}_{ca} , mas em um intervalo de tempo $t_{ca} = |\mathbf{X}_c - \mathbf{X}_a|/\nu$, que pode ser inferior a t_{cb} . Ou seja, embora \mathbf{F}_{ca} seja local entre os pares envolvidos (c e a), ela não necessariamente o é para b no novo referencial, pois contribui (diretamente) para sua aceleração, é o terceiro termo de (4.3). Sintetizando, pode-se dizer que:

- A aceleração de uma partícula de interesse i exibirá NL se essa depender de uma força fictícia entre o referencial material e uma terceira partícula;

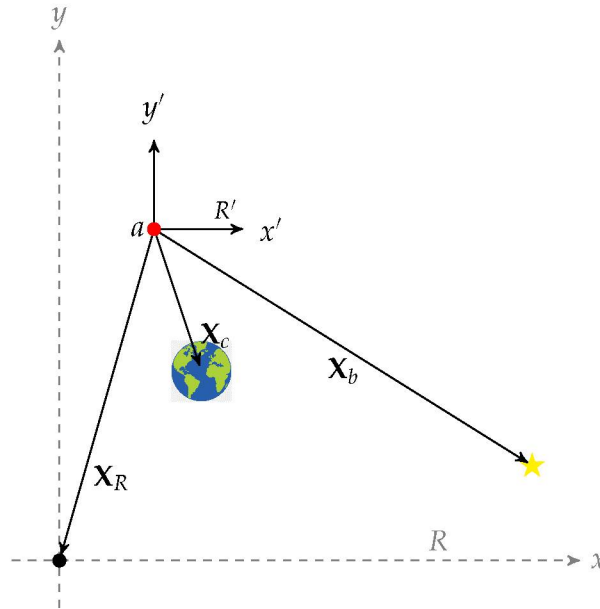


Figura 4.3 – Referencial R , Terra e estrela distante relativas à R' (ou partícula a)

Para explicitar essa característica, suponha que $|\mathbf{X}_b - \mathbf{X}_c| \rightarrow \infty$ e $\mathbf{X}_b \rightarrow \infty$, i.e., que a partícula b está muito distante das demais — imagine que b é um estrela distante observada por a nas proximidades da terra c , conforme ilustrado em Figura 4.3. Nesse caso, a aceleração de b , do ponto de vista de a , é

$$\ddot{\mathbf{X}}_b \approx -\frac{\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{X}_c)}{m_a}, \quad (4.5)$$

pois as demais forças decrescem com $|\mathbf{X}_b - \mathbf{X}_c|$ e \mathbf{X}_b , conforme demandamos no início dessa seção, e, no limite acima, vão a zero. Ou seja, a partícula b é acelerada não-localmente (instantaneamente) por conta da interação local entre c e a , $\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{X}_c)$.

4.1.2 Referenciais conforme a MQ

A fim de incorporar aspectos não-clássicos aos referenciais internos, abordaremos o mesmo problema segundo a interpretação ortodoxa da MQ. O procedimento e as novas coordenadas serão

análogos aos da seção anterior, contudo o sistema analisado conterá apenas duas partículas: a , que será promovida a referencial, e b , associada ao subsistema de interesse.

Partiremos do estado quântico decomposto na base de autovetores de posição associado as coordenadas do éter R ; então, descartaremos o grau de liberdade associado à partícula a ; e, por fim, obteremos um elemento de matriz do estado reduzido, resultado da operação anterior. Então, transformaremos o contexto $C = \{\hat{x}_a, \hat{x}_b, \hat{p}_a, \hat{p}_b, \rho\}$ para o referencial associado à a , R , do qual obteremos um elemento de matriz análogo ao anterior. Adotaremos a PP. Com os elementos de matriz e os momento relativos associados ao subsistema b em cada referencial induziremos, por comparação, as condições necessárias para que as duas descrições sejam equivalentes e assim saberemos sob quais hipóteses é possível abandonar o éter.

4.1.2.1 Referencial Externo

Consideremos duas partículas a e b sendo observadas pelo éter R . A física, como vimos na seção 2.5, é descrita em termos do contexto $C = \{\hat{x}_a, \hat{x}_b, \hat{p}_a, \hat{p}_b, \rho\}$, com ρ um estado puro bipartido, i.e., $\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B)$. Como sempre, \mathcal{A} e \mathcal{B} denotam os subsistemas associados às partículas rotuladas por a e b . Uma base desse espaço corresponde aos autovetores $|x_a, x_b\rangle_R \equiv |x_a\rangle_a \otimes |x_b\rangle_b$, em que $|x_k\rangle_k$ é um autovetor de \hat{x}_k — ou seja, $|x_k\rangle_k$ denota o autovetor de posição da k -ésima partícula relativa à R . Isso nos permite escrever

$$|\psi\rangle = \int dx_a dx_b \psi(x_a, x_b) |x_a, x_b\rangle_R. \quad (4.6)$$

Como estamos interessados em descrever o subsistema \mathcal{B} (o subsistema comum aos referenciais, ou, em outras palavras, a partícula que tanto o éter como R' veem), devemos traçar fora a partição associada à \mathcal{A} do estado acima. Formalmente, isso equivale à $\text{Tr}_a(\rho) \equiv \rho_{x_b}$, ou, quando conduzimos os cálculos explicitamente,

$$\begin{aligned} \rho_{x_b} &= \text{Tr}_a(\rho) \\ &= \int dx_a \langle x_a | \mathbb{1}' \rho \mathbb{1}'' | x_a \rangle \\ &= \int dx_a dx'_a dx'_b dx''_a dx''_b \underbrace{\langle x_a | x'_a, x'_b \rangle}_{\delta(x'_a - x_a) |x'_b\rangle} \underbrace{\langle x'_a, x'_b | \rho | x''_a, x''_b \rangle}_{\psi(x'_a, x'_b) \psi^*(x''_a, x''_b)} \underbrace{\langle x''_a, x''_b | x_a \rangle}_{\langle x''_b | \delta(x''_a - x_a)} \\ &= \int dx_a dx'_b dx''_b \psi(x'_a, x'_b) \psi^*(x''_a, x''_b) |x'_b\rangle\langle x''_b| \\ &= \int dx_a dx_b dx'_b \psi(x_a, x_b) \psi^*(x_a, x'_b) |x_b\rangle\langle x'_b|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vejamos, agora, como se expressa um elemento de matriz do estado reduzido acima

$$\begin{aligned} \langle \chi | \rho_{x_b} | \chi + \delta \rangle &= \langle \chi | \left[\int dx_a dx_b dx'_b \psi(x_a, x_b) \psi^*(x_a, x'_b) |x_b\rangle\langle x'_b| \right] | \chi + \delta \rangle \\ &= \int dx_a \int dx_b dx'_b \psi(x_a, x_b) \psi^*(x_a, x'_b) \langle \chi | x_b \rangle \langle x'_b | \chi + \delta \rangle \\ &= \int dx_a \psi(x_a, \chi) \psi^*(x_a, \chi + \delta) \\ &= \int du \psi(u, \chi) \psi^*(u, \chi + \delta), \end{aligned} \quad (4.8)$$

na qual trocamos (x_a, x_b) por $(u, \chi + u)$ por conveniência. Se o deslocamento arbitrário δ é nulo, obtém-se a probabilidade condicional

$$\langle \chi | \rho_{x_b} | \chi \rangle = \int du |\psi(u, \chi)|^2 \quad (4.9)$$

A seguir, computaremos os objetos análogos à (4.7) e (4.8) da perspectiva do referencial material, a fim de compará-los. Veremos que, em geral, há diferenças, e encontraremos as mesmas condições deduzidas por [13] para as anular.

4.1.2.2 Referencial Interno

Primeiramente precisamos “saltar” da origem do referencial externo para a partícula a . Como vimos na seção 2.5, isso se faz por meio da unitária $T = \hat{p}_a e^{i\hat{x}_a \hat{p}_b / \hbar}$. Adotando a perspectiva passiva (PP), na qual trocamos o sistema de coordenadas, mas mantemos o estado inalterado. Assim, temos que os operadores posição e momento transformar-se-ão,

$$\begin{aligned} \hat{X}_R &\equiv T^\dagger \hat{x}_a T = -\hat{x}_a, & \hat{\Pi}_R &\equiv T^\dagger \hat{p}_a T = -(\hat{p}_a + \hat{p}_b), \\ \hat{X}_b &\equiv T^\dagger \hat{x}_b T = \hat{x}_b - \hat{x}_a, & \hat{\Pi}_b &\equiv T^\dagger \hat{p}_b T = \hat{p}_b, \end{aligned} \quad (4.10)$$

nas quais (\hat{X}_R, \hat{X}_b) e $(\hat{\Pi}_R, \hat{\Pi}_b)$ denotam os novos operadores posição e momento, respectivamente. Enquanto aqueles denotam as posições relativas ao novo referencial R' (repare a semelhança com a mesma troca clássica realizada na seção anterior), estes *não* denotam os respectivos momento relativos (o momento relativo à b deveria ser $\mu(\hat{p}_a/m_a + \hat{p}_b/m_b)$ e não simplesmente \hat{p}_b); são apenas os momentos *canonicamente* conjugados à (\hat{X}_R, \hat{X}_b) .

Muito embora o estado ρ permaneça inalterado, quando adotamos a PP, nada nos impede de escrevê-lo de acordo com a base dos autovetores de posição associados aos novos operadores posição (\hat{X}_R, \hat{X}_b) . A correspondência entre as bases é expressa pelo mapa:

$$|x_a, x_b\rangle_R \rightarrow |-x_a, x_b - x_a\rangle_{R'}, \quad (4.11)$$

no qual os sub-índices dos kets ressaltam o espaço de Hilbert a que pertencem. Isso é possível porque existe um isomorfismo entre o antigo e o novo espaço de Hilbert. Assim sendo, reescrevemos (4.6) conforme

$$|\psi\rangle = \int dx_a dx_b \psi(x_a, x_b) |-x_a, x_b - x_a\rangle_{R'}, \quad (4.12)$$

ou, com $(x_a, x_b) = (-X_R, X_b - X_R)$, encontramos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \int dX_R dX_b \psi(-X_R, X_b - X_R) |X_R, X_b\rangle_{R'} \\ &= \int dX_R dX_b \Psi(X_R, X_b) |X_R, X_b\rangle_{R'}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

nas quais usamos da equivalência $\psi(-X_R, X_b - X_R) \equiv \Psi(X_R, X_b)$.

Como dito anteriormente, estamos interessados em comparar as descrições de R e R' acerca do subsistema B ; logo, devemos descartar os demais graus de liberdade. Nesse caso, o grau de

liberdade “sobressalente” é a origem do éter relativa à a , X_R ; portanto, o estado reduzido associado ao subsistema de interesse é $\text{Tr}_{X_R}(\rho) \equiv \rho_{X_b}$ ou

$$\begin{aligned}
 \rho_{X_b} &= \text{Tr}_{X_R}(\rho) \\
 &= \int dX_R \langle X_R | \mathbb{1}' \rho \mathbb{1}'' | X_R \rangle \\
 &= \int dX_R dX'_R dX'_b dX''_R dX''_b \underbrace{\langle X_R | X'_R, X'_b \rangle}_{\delta(X'_R - X_R) | X'_b} \underbrace{\langle X'_R, X'_b | \rho | X''_R, X''_b \rangle}_{\psi(X'_R, X'_b) \psi^*(X''_R, X''_b)} \underbrace{\langle X''_R, X''_b | X_R \rangle}_{\langle X'_b | \delta(X''_R - X_R)} \\
 &= \int dX_R dX'_b dX''_b \psi(X'_R, X'_b) \psi^*(X''_R, X''_b) |X'_b\rangle \langle X''_b| \\
 &= \int dX_R dX_b dX'_b \Psi(X_R, X_b) \Psi^*(X_R, X'_b) |X_b\rangle \langle X'_b|.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Adotando as mesmas coordenadas auxiliares dispostas na seção anterior, as quais se relacionam com as coordenadas relativas através da forma $(x_a, x_b) = (u, \chi + u)$, um elemento arbitrário de matriz do estado reduzido acima expressa-se como $\langle \chi | \rho_{X_b} | \chi + \delta \rangle$ ou, explicitamente,

$$\begin{aligned}
 \langle \chi | \rho_{X_b} | \chi + \delta \rangle &= \langle \chi | \left[\int dX_R dX_b dX'_b \Psi(X_R, X_b) \Psi^*(X_R, X'_b) |X_b\rangle \langle X'_b| \right] | \chi + \delta \rangle \\
 &= \int dX_R \int dX_b dX'_b \Psi(X_R, X_b) \Psi^*(X_R, X'_b) \langle \chi | X_b \rangle \langle X'_b | \chi + \delta \rangle \\
 &= \int dX_R \Psi(X_R, \chi) \psi^*(X_R, \chi + \delta) \\
 &= \int du \psi(u, \chi + u) \psi^*(u, \chi + u + \delta),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

em que

$$\begin{aligned}
 \Psi(X_R, \chi) &= \psi(-X_R, \chi - X_R) = \psi(u, \chi + u) \\
 \Psi(X_R, \chi + \delta) &= \psi(-X_R, \chi + \delta - X_R) = \psi(u, \chi + u + \delta).
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Podemos, ainda, interpretar u como uma translação da coordenada χ e reescrever (4.15) como

$$\langle \chi | \rho_{X_b} | \chi + \delta \rangle = \int du e^{u\partial_\chi} [\psi(u, \chi) \psi^*(u, \chi + \delta)]. \tag{4.17}$$

Realizamos a troca de funções de onda (4.16) a fim de aproximar o elemento acima com aquele encontrado em (4.8). Percebe-se, contudo, que as descrições diferem por uma translação u da coordenada χ . Os autores de [13] sugerem, numa comparação semelhante, que a primeira condição necessária para equivalência é a de que, do ponto de vista externo R , não deve haver emaranhamento entre os graus de liberdade da partícula a e b . Em outras palavras, isso significa que $\psi = \phi_a(x_a) \phi_b(x_b)$,

$$\langle \chi | \rho_{X_b} | \chi + \delta \rangle = \phi_b(\chi) \phi_b^*(\chi + \delta) \tag{4.18}$$

e

$$\langle \chi | \rho_{X_b} | \chi + \delta \rangle = \left[\int du |\phi_a(u)|^2 e^{\bar{x}_a \partial_\chi} \right] \phi_b(\chi) \phi_b^*(\chi + \delta). \tag{4.19}$$

Vemos, todavia, que tal condição não é *suficiente* para obter descrições análogas. Para tanto, é preciso exigir também que o estado da partícula a seja bem localizado, isto é, $|\phi_a(x_a)|^2 = \delta(x_a - \bar{x}_a)$, de modo que

$$\langle \chi | \rho_{X_b} | \chi + \delta \rangle = e^{\bar{x}_a \partial_\chi} \phi_b(\chi) \phi_b^*(\chi + \delta), \tag{4.20}$$

a qual é idêntica à (4.18), a menos da translação \bar{x}_a no sistema de coordenadas.

Embora o estado e a sua representação matricial capturem grande parte da física de um sistema quântico, a noção *completa* também envolve os operadores, no que chamamos de contexto. Logo, é preciso investigar a dinâmica dos valores esperados associados à b em ambos os referenciais. Para tanto, precisamos evocar uma segunda transformação de coordenadas, dada pela unitária $T = e^{-i\hat{x}_b\hat{p}_a/\hbar} e^{im_b\hat{p}_b\hat{x}_a/\hbar M}$, em que $M = m_a + m_b$, responsável por trocar as coordenadas externas (x_a, x_b) por (X_R, x_{cm}) , as coordenadas relativa e do centro de massa⁵. Os operadores posição e momento transformar-se-ão,

$$\hat{X}_b \equiv T^\dagger \hat{x}_b T = \hat{x}_b - \hat{x}_a, \quad \hat{\Omega}_b \equiv T^\dagger \hat{p}_b T = \mu(\hat{p}_b/m_b - \hat{p}_a/m_a), \quad (4.21)$$

nas quais \hat{X}_b e $\hat{\Omega}_b$ denotam os novos operadores posição e momento, respectivamente. Percebe-se que nessa transformação, diferentemente da anterior, estes, além de canonicamente conjugados àqueles, são também os respectivos momentos *relativos*. Nota-se, também, que o novo operador posição associado à b é o mesmo da transformação anterior (não à toa o denotamos pelo mesmo símbolo). Assim, é natural entender que seu momento *relativo* é $\hat{\Omega}_b$ em ambos os contextos. Calculando seu valor esperado, obtemos

$$\langle \hat{\Omega}_b \rangle = \langle \psi | T^\dagger \hat{p}_b T | \psi \rangle = \langle T^\dagger \hat{p}_b T \rangle = \mu \left(\frac{\hat{p}_b}{m_b} - \frac{\hat{p}_a}{m_a} \right), \quad (4.22)$$

o qual difere daquele observado pelo éter $\langle \hat{p}_b \rangle$. Repare que na PP o estado $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ fica inalterado. Esses são iguais se a terceira condição para equivalência das descrições, a condição de inercialidade ($m_a \gg m_b$), for satisfeita. Isso, pois nesse limite $\mu \rightarrow m_a$ e $m_a/m_b \rightarrow 0$, de modo que $\langle \hat{\Omega}_b \rangle \approx \langle \hat{p}_b \rangle$.

Em suma, vimos que na MQ, diferentemente da MC, é necessário assumir que, além da inercialidade do referencial material, do ponto de vista do éter, não haja correlação alguma entre as partes do sistema, bem como que a partícula promovida a referencial tenha sua função de onda bem definida. Ambas considerações são, de certa forma, tacitamente assumidas na MC — afinal, o laboratório é uma entidade macroscópica com incerteza de posição desprezível e não perturba o sistema de interesse (i.e., por hipótese, não interage com esse, de modo que jamais haverá correlação entre seus observáveis).

4.1.3 Referenciais conforme a MB

De maneira análoga àquelas realizadas nas seções anteriores, estudaremos a covariância e NL presentes na descrição oferecida por uma partícula quântica. Consideramos, portanto, um sistema composto por duas partículas “livres” (no sentido clássico) a e b , uma vez que estamos interessados nos efeitos do potencial quântico e porque potenciais clássicos podem ser facilmente acrescentados às equações deduzidas aqui. Veremos que a segunda lei de Newton é variante sob a transformação de coordenadas $(x_a, x_b) = (-X_R, X_b - X_R)$ e que só deixará de ser sob condições que tornam as descrições de R e R' locais, as quais, como evidenciaremos, são equivalentes àquelas apresentadas na subseção 4.1.2. Ademais, detectaremos duas causas distintas de NL: o emaranhamento e a não-inercialidade do referencial interno.

⁵ Essa é a transformação que comumente fazemos em problemas com força central na MC ou quando queremos resolver o átomo de hidrogênio na MQ.

4.1.3.1 Descrições gerais

Considere por simplicidade que as duas partículas estão livres no sentido clássico — i.e., apenas o potencial quântico atua sobre elas — e que elas se movem sobre uma dimensão apenas governadas pelo campo $\psi = \psi(x_a, x_b, t)$, tal que $\sqrt{\rho(x_a, x_b, t)} = |\psi(x_a, x_b, t)|$. A segunda lei de Newton para as partículas a e b , do ponto de vista do éter, é, respectivamente:

$$\begin{aligned} m_b \ddot{x}_b &= -\partial_{x_b} Q^{[\psi]}, & Q^{[\psi]} &= \frac{-\hbar^2}{2|\psi|} \left(\frac{\partial_{x_a}^2 |\psi|}{m_a} + \frac{\partial_{x_b}^2 |\psi|}{m_b} \right), \\ m_a \ddot{x}_a &= -\partial_{x_a} Q^{[\psi]}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como vimos na subseção 3.2.1, a força sobre a partícula a (b) depende da configuração instantânea de todo o sistema, inclusive da posição da partícula b (a), por isso a taxamos de não-local. Além disso, verificou-se que tal não-localidade equivale ao emaranhamento do estado, ou seja, se (e somente se) a função de onda ψ é separável, do ponto de vista do referencial em questão, então a força é local. Diante disso, bem como do fato de que interações clássicas também são responsáveis por efeitos não-locais, acrescentaremos o adjetivo “quântico” para nos referirmos a essa não-localidade (associada ao emaranhamento), abreviando-a por NLQ.

Agora vejamos quais são as acelerações previstas para partícula b e para a origem do antigo sistema de coordenadas X_R , do ponto de vista do novo referencial R' , cuja origem se encontra na partícula a . Para tanto, recorreremos às mesmas manipulações feitas na subseção 3.2.1, ou seja,

$$\begin{aligned} \ddot{X}_b &= \frac{F_b^{[\psi]}(-X_R, X_b - X_R)}{m_b} - \frac{F_a^{[\psi]}(-X_R, X_b - X_R)}{m_a} \\ \ddot{X}_R &= -\frac{F_a^{[\psi]}(-X_R, X_b - X_R)}{m_a}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Antes de aplicarmos qualquer condição sobre essas equações, é preciso explicitar a dependência da força e do potencial quântico com as novas coordenadas $(X_R, X_b) \equiv (-x_a, x_b - x_a)$. Para tanto, é necessário rescrever as derivadas parciais em termos das novas, i.e.,

$$\begin{aligned} \partial_{x_a} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_a} = \frac{\partial X_R}{\partial x_a} \partial_{X_R} + \frac{\partial X_b}{\partial x_a} \partial_{X_b} = -(\partial_{X_R} + \partial_{X_b}), \\ \partial_{x_b} &\equiv \frac{\partial}{\partial x_b} = \frac{\partial X_R}{\partial x_b} \partial_{X_R} + \frac{\partial X_b}{\partial x_b} \partial_{X_b} = \partial_{X_b}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

substituí-las no potencial,

$$\begin{aligned} Q^{[\psi]}(-X_R, X_b - X_R) &= \frac{-\hbar^2}{2|\Psi|} \left[\frac{(\partial_{X_R} + \partial_{X_b})^2}{m_a} + \frac{\partial_{X_b}^2}{m_b} \right] |\Psi| \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2|\Psi|} \left(\frac{\partial_{X_R}^2}{m_a} + \frac{\partial_{X_b}^2}{\mu} + \frac{2\partial_{X_R}\partial_{X_b}}{m_a} \right) \right] |\Psi| \equiv Q^{[\Psi]}(X_R, X_b), \end{aligned} \quad (4.26)$$

e nas forças,

$$\begin{aligned} F_a^{[\psi]}(-X_R, X_b - X_R) &= (\partial_{X_R} + \partial_{X_b}) Q^{[\Psi]} \equiv F_a^{[\Psi]}, \\ F_b^{[\psi]}(-X_R, X_b - X_R) &= -\partial_{X_b} Q^{[\Psi]} \equiv F_b^{[\Psi]}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

nas quais $\psi(-X_R, X_b - X_R) = \Psi(X_R, X_b)$. Assim, (4.24) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\ddot{X}_b &= -\frac{\partial_{X_b} Q^{[\Psi]}}{m_b} - \frac{(\partial_{X_R} + \partial_{X_b}) Q^{[\Psi]}}{m_a} \\ \ddot{X}_R &= -\frac{(\partial_{X_R} + \partial_{X_b}) Q^{[\Psi]}}{m_a},\end{aligned}\quad (4.28)$$

ou, ainda, multiplicando-se por μ e m_a , respectivamente, e juntando as derivadas em comum na primeira equação,

$$\begin{aligned}\mu \ddot{X}_b &= -\partial_{X_b} Q^{[\Psi]} - \frac{m_b}{m_a + m_b} \partial_{X_R} Q^{[\Psi]} \\ m_a \ddot{X}_R &= (\partial_{X_b} + \partial_{X_R}) Q^{[\Psi]}.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Embora a força sobre a partícula b , relacionada aos referenciais R e R' , dependa da posição de b a que cada referencial tem acesso (x_b e X_b , respectivamente), elas também dependem (não-localmente) de pontos distintos x_a e X_R . Isso é reflexo da função de onda (com seu respectivo espaço de configuração) que os referenciais R e R' observam, ψ e Ψ , respectivamente.

As equações (4.29) e (4.23) são descrições físicas do subsistema \mathcal{B} de acordo com cada referencial. No entanto, para que sejam equivalentes, será necessário, mas não suficiente, “descartar” suas dependências com X_r e x_a , respectivamente — o que significa, em outras palavras, impor localidade. Repare-se que esse descarte difere, em sua finalidade, daquele realizado na seção anterior: naquela traçamos fora as partições associadas a esses graus de liberdade com o objetivo de obter a descrição do subsistema \mathcal{B} , enquanto aqui o fazemos buscando equivalência das equações.

Ademais, note que a NL, presente em cada referencial, tem causas distintas: enquanto em R essa é exclusivamente quântica (afinal, o éter é inercial por definição), em R' essa será tanto quântica como fictícia, pois, além da função de onda Ψ ser não-fatorável em geral, o novo referencial é não-inercial.

4.1.3.2 Condições de Equivalência

Começemos avaliando como as equações para b reagem à separabilidade de cada estado. No caso do éter, procedemos de maneira análoga à desenvolvida na subseção 3.2.1, i.e., definindo $\psi = \phi_a \phi_b$, com $\sqrt{\rho_k} = |\phi_k(x_k, t)|$ e $k = a, b$, e simplificando conforme (3.43)

$$\ddot{x}_b = -\partial_{x_b} Q^{[\phi_b]}(x_b), \quad Q^{[\phi_b]}(x_b) = -\frac{\hbar^2}{2m_b} \frac{\partial_{x_b}^2 |\phi_b|}{|\phi_b|}. \quad (4.30)$$

Já para o referencial R' , prosseguimos de maneira análoga. Primeiramente, definindo $\Psi = \Phi_R \Phi_b$, com $\sqrt{\rho_k} = |\Phi_k(x_k, t)|$ e $k = R, b$ e, então, simplificando:

$$\begin{aligned}\partial_{X_b} Q^{[\Psi]} &= \partial_{X_b} \left[-\frac{\hbar^2}{2|\Psi|} \left(\frac{\partial_{X_R}^2}{m_a} + \frac{\partial_{X_b}^2}{\mu} + \frac{2\partial_{X_R} \partial_{X_b}}{m_a} \right) |\Psi| \right] \\ &= \partial_{X_b} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial_{X_R}^2 |\Phi_R|}{m_a |\Phi_R|} + \frac{\partial_{X_b}^2 |\Phi_b|}{\mu |\Phi_b|} + \frac{2\partial_{X_R} |\Phi_R| \partial_{X_b} |\Phi_b|}{m_a |\Psi|} \right) \right] \\ &= \partial_{X_b} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial_{X_b}^2 |\Phi_b|}{\mu |\Phi_b|} + \frac{2\partial_{X_R} |\Phi_R| \partial_{X_b} |\Phi_b|}{m_a |\Psi|} \right) \right],\end{aligned}\quad (4.31)$$

pois apenas $\frac{\partial_{X_R}^2 |\Phi_R|}{m_a}$ é constante para X_b , de modo que (4.29), com as expressões acima, ainda fica dependente de X_R ,

$$\begin{aligned} \mu \ddot{X}_b = & -\partial_{X_b} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial_{X_b}^2 |\Phi_b|}{\mu |\Phi_b|} + \frac{2\partial_{X_R} |\Phi_R| \partial_{X_b} |\Phi_b|}{m_a |\Psi|} \right) \right] \\ & + \frac{m_b}{m_a + m_b} \partial_{X_R} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial_{X_R}^2 |\Phi_R|}{m_a |\Phi_R|} + \frac{2\partial_{X_R} |\Phi_R| \partial_{X_b} |\Phi_b|}{m_a |\Psi|} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim, verifica-se que, enquanto a condição de separabilidade é suficiente para obter localidade de (4.23), essa apenas elimina alguns dos termos que contribuem para a NL de (4.29). Essa eliminação não é surpreendente, pois, como mencionado anteriormente, a NL presente em (4.29) tem como causa tanto o emaranhamento como a não-inercialidade de R' . Portanto, quando “desligamos” aquela, ainda ficamos com o efeito desta. Na sequência, iremos considerar R' aproximadamente inercial e, então, constatar que obtemos localidade também em (4.32).

Para tanto, considere que $m_a \gg m_b$, e repare que, exceto pelo termo $\frac{\partial_{X_b}^2 |\Phi_b|}{\mu |\Phi_b|}$ em (4.32), todos os outros são inversamente proporcionais à m_a quando as devidas simplificações são realizadas. Assim, no limite acima, estes são desprezíveis comparativamente com aquele, de forma que obtemos

$$m_b \ddot{X}_b = -\partial_{X_b} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial_{X_b}^2 |\Phi_b|}{m_b |\Phi_b|} \right) \right] \quad (4.33)$$

e, usando o mesmo argumento em (4.30),

$$m_b \ddot{x}_b = -\partial_{x_b} \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial_{x_b}^2 |\phi_b|}{m_b |\phi_b|} \right) \right], \quad (4.34)$$

lembrando que a massa reduzida equivale à m_b nesse limite. Essas equações são idênticas quanto à forma, ou seja, os potenciais e as suas respectivas forças são computados da mesma forma em cada referencial. Em outras palavras, a equação de força Bohmiana só será covariante sob a transformação $(x_a, x_b) = (-X_R, X_b - X_R)$ se 1) R' for inercial e 2) ψ e 3) Ψ forem separáveis. Mostraremos a seguir que 3) equivale à segunda condição apresentada na subseção 4.1.2 para estados Gaussianos. Para tanto, reavaliaremos o cálculo desenvolvido na subseção 4.1.2 sob a PA, na qual os operadores permanecem inalterados, mas o estado muda. Isso é necessário, uma vez que queremos analisar como o emaranhamento varia segundo a transformação e esse é uma grandeza que depende do estado. Se adotássemos a PP iríamos concluir que ele é constante.

Como antes, a física em R é descrita em termos do contexto $C = \{\hat{x}_a, \hat{x}_b, \rho\}$. Todavia, agora, empregando-se a PA, interpreta-se ρ como o estado que o éter vê. Novamente, podemos escrevê-lo na mesma base $\{|x_a, x_b\rangle\}$ como

$$|\psi\rangle = \int dx_a dx_b \psi(x_a, x_b) |x_a, x_b\rangle, \quad (4.35)$$

na qual omitimos os sub-índices em $|x_a, x_b\rangle$ uma vez que o espaço de Hilbert será sempre o mesmo, independentemente da transformação. Para saltarmos para o referencial da partícula a , usamos da mesma unitária $\hat{p}_a e^{i\hat{x}_a \hat{p}_b / \hbar}$, contudo, essa agora atuará sobre o estado e não sobre os operadores, i.e., o novo contexto será $C' = \{\hat{x}_a, \hat{x}_b, \rho'\}$ e os novos autovetores de base serão

$$T |x_a, x_b\rangle = |-x_a, x_b - x_a\rangle. \quad (4.36)$$

Aplicando-a no estado (4.35), encontramos

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= T|\psi\rangle = \int dx_a dx_b \psi(x_a, x_b) T|x_a, x_b\rangle \\ &= \int dx_a dx_b \psi(x_a, x_b) |-x_a, x_b - x_a\rangle. \end{aligned} \quad (4.37)$$

E, implementando a transformação de coordenadas $(x_a, x_b) = (-X_R, X_b - X_R)$,

$$|\Psi\rangle = \int dX_b dX_R \Psi(X_R, X_b) |X_R, X_b\rangle, \quad (4.38)$$

na qual usamos de $\psi(-X_R, X_b - X_R) \equiv \Psi(X_R, X_b)$, que, na PA, pode ser devidamente interpretado como a função de onda que R' vê. Como feito na subseção 4.1.2, encontra-se o mesmo estado reduzido (4.14).

Agora, suponha-se que o estado seja separável $\psi = \phi_a \phi_b$ e que cada função de onda ϕ_k seja uma Gaussiana centrada em \bar{x}_k , com largura δ_k (dependente do tempo) e fase arbitrária — como aquela apresentada em (2.18). Ao trocarmos as coordenadas $(x_a, x_b) = (-X_R, X_b - X_R)$, percebe-se que o novo estado $\Psi(X_R, X_b) = \psi(-X_R, X_b - X_R)$ será em geral emaranhado, pois não é mais possível separar as Gaussianas. Constatamos, portanto, que o emaranhamento muda sob essa transformação — o que já era esperado, pois, como vimos na seção 2.5, somente transformações *separáveis* preservam o emaranhamento.

Vejamos a sua expressão analítica, isto é, calculemos a entropia linear de emaranhamento apresentada na subseção 2.4.2. Para tanto, precisamos primeiramente de

$$\begin{aligned} \rho_{x_b}^2 &= \int dx_a dx_b dx'_b dx'_a d\bar{x}_b d\bar{x}'_b \psi(x_a, x_b) \psi^*(x_a, x'_b) \psi(x'_a, \bar{x}_b) \psi^*(\bar{x}_a, \bar{x}'_b) |\bar{x}_b\rangle \langle \bar{x}'_b| x_b\rangle \langle x'_b| \\ &= \int dx_a dx_b dx'_b dx'_a d\bar{x}_b \psi(x_a, x_b) \psi^*(x_a, x'_b) \psi(x'_a, \bar{x}_b) \psi^*(\bar{x}_a, x_b) |\bar{x}_b\rangle \langle x'_b|; \end{aligned} \quad (4.39)$$

traçando-o, temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\rho_{x_b}^2) &= \int dx_b \langle x_b | \rho_{x_b}^2 | x_b \rangle \\ &= \int dx_a dx_b dx'_a dx'_b \psi(x_a, x_b) \psi^*(x_a, x'_b) \psi(x'_a, x_b) \psi^*(x'_a, x'_b); \end{aligned} \quad (4.40)$$

substituindo as Gaussianas acima e integrando, encontra-se a pureza do estado Ψ . Conforme apresentado na subseção 2.4.2, subtraí-la de 1 equivale ao emaranhamento, mas subtrair de 1 seu valor ao quadrado é igualmente uma medida de emaranhamento, uma vez que a pureza pertence ao intervalo $[0, 1]$. Procedendo dessa forma, encontramos

$$\epsilon^{[\Psi]} = \frac{\delta_a^2 [1 + (4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t})^2]}{\delta_b^2 + \delta_a^2 [1 + (4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t})^2]}, \quad (4.41)$$

na qual $\alpha_{b,t}$ é coeficiente complexo, dependente do tempo, associado à Gaussiana genérica da partícula b (2.18).

Escrevemos a expressão acima em termos das variâncias antigas (δ_a, δ_b) , aquelas observadas pelo éter, somente para analisarmos sua relação com a condição 3), dada em termos das coordenadas de R . Antes disso, repare que $\epsilon^{[\Psi]} \in [0, 1]$, como demanda qualquer medida de emaranhamento, pois, como $\delta_b^2 \geq 0$ e $\delta_a^2 [\dots] \geq 0$, então

$$\delta_b^2 + \delta_a^2 [1 + (4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t})^2] \geq \delta_a^2 [1 + (4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t})^2] \geq 0 \quad (4.42)$$

ou, dividindo por $\delta_b^2 + \delta_a^2[\dots]$,

$$1 \geq \frac{\delta_a^2 [1 + (4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t})^2]}{\delta_b^2 + \delta_a^2 [1 + (4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t})^2]} \geq 0 \quad (4.43)$$

como queríamos mostrar.

Para partículas livres (como demanda a primeira condição), (4.41) simplifica-se conforme

$$\epsilon^{[\Psi]} = \frac{1}{1 + (\delta_{b,0}/\delta_a)^2}, \quad \delta_a = \delta_{a,0} \sqrt{1 + (t/\tau_a)^2}, \quad (4.44)$$

na qual $\delta_{b,0}$ é a largura inicial da função de onda associada à b e δ_a a relação de dispersão de a . Para se convencer disso basta notar que $\delta_{b,0} \sqrt{1 + (t/\tau_b)^2} = \delta_{b,0}[\dots]$, i.e., que

$$t/\tau_b = 4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t}. \quad (4.45)$$

Para tanto, reescreva $\alpha_{b,t}$ em termos de $\delta_{b,0}$ e τ_b , ou seja, substitua a segunda equação do par (2.14) em (2.23),

$$\alpha_{b,t} = \frac{1/(4\delta_{b,0}^2)}{1 + it/\tau_b}, \quad (4.46)$$

na qual identifica-se a escala de Ehrenfest $\tau_b := 2m_b\delta_{b,0}^2/\hbar$. Assim,

$$\text{Im } \alpha_{b,t} = -\frac{t/\tau_b}{1 + (t/\tau_b)^2} \frac{1}{4\delta_{b,0}^2} \quad (4.47)$$

e

$$-4\delta_b^2 \text{Im } \alpha_{b,t} = t/\tau_b, \quad (4.48)$$

dado que $\delta_b = \delta_{b,0} \sqrt{1 + (t/\tau_b)^2}$, como queríamos mostrar.

Vemos que, nesse caso, se $\delta_{b,0} > \delta_{a,0}$ e $t \gg \frac{2m_a\delta_{a,0}}{\hbar} \sqrt{\delta_{b,0}^2 - \delta_{a,0}^2}$, então $\epsilon^{[\Psi]} \rightarrow 0$. Ou seja, demandar separabilidade equivale a exigir que o estado da partícula a seja bem localizado.

4.2 Não-localidade na dinâmica Bohmiana

O objetivo desta seção é identificar quais os principais ingredientes na mecânica clássica e quântica responsáveis por evidências de NL, procurando entender como aqueles inseridos nestes violam o princípio de localidade enunciado por EPR. Faremos isso com a finalidade de antecipar como o tema deve ser tratado na MB — uma teoria realista e com uma ontologia de partícula, como a MC; mas com ingredientes genuinamente quânticos, como o emaranhamento. Essa análise culminará na *definição de dois tipos distintos de NL*, uma associada à posição e outra ao campo, os dois objetos ontológicos que fundamentam a MB. Então, a fim de incluir o campo explicitamente na dinâmica, introduziremos as médias condicionais. Por fim, aplicaremos esses conceitos a um sistema com duas partículas.

4.2.1 Categorias de não-localidade conforme a ontologia Bohmiana

Como vimos na subseção 2.3.1, o emaranhamento presente no singleto é peça central na construção lógica do argumento, que nos obriga a escolher entre a completeza da teoria e o princípio de localidade. Mais tarde, vimos na subseção 2.3.2, que, de modo a completar a teoria quântica,

necessariamente precisamos lançar mão de variáveis não-locais⁶, i.e., que variáveis locais não são capazes de reproduzir as estatísticas e correlações quânticas responsáveis por violar a desigualdade de Bell. Essa NL, tão intimamente relacionada ao *estado* e seu emaranhamento, anteriormente denominada NLQ, a renomearemos de *NL de campo* (NL- ψ) — antecipando o contexto Bohmiano (no qual esta será empregada), em que o estado quântico, $|\psi\rangle$, na representação das posições, tem o papel de *campo físico*.

Em contraposição a essa NL tão enraizada no emaranhamento, vimos, na subseção 4.1.1, que na MC há uma espécie distinta de NL, que em nada deve respeito ao emaranhamento (dado que este não existe nessa teoria). Na verdade, essa tem origem na *não-inercialidade* dos referenciais que, através de forças fictícias, fazem com que a dinâmica de uma partícula dependa da posição de outra distante — como as posições são elementos de realidade na MC, temos uma evidência clara da violação do *princípio de localidade* quando a variação de uma afeta a dinâmica da outra⁷. Essa NL, associada à *posição* das partículas, denominaremos de NL de posição (NL- x).

Prefere-se o adjetivo *posição*, a outro contendo a ideia de movimento (e.g., deslocamento ou trajetória), por fazer referência direta ao elemento de realidade primitivo⁸ da MC, a *posição*. Contudo, não se pode perder de vista que somente a dependência com outro elemento de realidade, sem variá-lo no tempo, não é condição suficiente para atestar NL. Ademais, priorizando esse termo, temos, em conjunto com a definição anterior, uma associação entre NL e os objetos ontológicos da MB.

Com essas nomenclaturas ou definições em mente, veremos como o princípio de localidade é violado na MB. Nessa teoria, assim como na MC, a *posição* é um elemento de realidade primitivo e a narrativa é dada em termos da sua dinâmica, contudo, diferentemente daquela, a dinâmica conta com elementos genuinamente quânticos oriundos do *campo* ψ , como o emaranhamento, por exemplo. Então, dado esse contexto, é de se esperar que a dinâmica Bohmiana apresente sintomas, tanto de NL- x , como de NL- ψ . Cabe, portanto, redefini-las explicitamente em termos da dinâmica, ou seja:

- (Não-localidade de posição). *Se a dinâmica de um elemento de realidade, em certo instante t , depender, no mesmo instante, de outro elemento de realidade distante, então a dinâmica conterà aspectos de NL- x (será NL- x);*
- (Não-localidade de campo). *Se a força sobre uma partícula for proporcional ao emaranhamento, então a dinâmica conterà aspectos de NL- ψ (será NL- ψ).*

Poderíamos, ainda, associá-las aos cenários físicos, ou às grandezas físicas, nos quais há violação das hipóteses de CLR e CL respectivamente.

Um exemplo do primeiro tipo de NL foi dado em subseção 4.1.1. Lá, analisa-se a dinâmica da partícula b do ponto de vista de um referencial *não-inercial*, a partícula a , e constata-se que quando, por exemplo, aquela está muito distante das demais (b e c), há uma evidência clara de NL, pois a aceleração da mesma, vista a partir de a ,

$$\ddot{\mathbf{X}}_b \approx -\frac{\mathbf{F}_{ca}(\mathbf{X}_c)}{m_a}, \quad (4.49)$$

⁶ Sendo a MB o exemplo mais consagrado desse empreendimento.

⁷ Os demais detalhes que ratificam essa afirmativa estão na subseção 4.1.1.

⁸ Primitivo no sentido de algo desprovido de definição, baseado na intuição — e.g., a noção de ponto e reta na Geometria.

depende instantaneamente da posição da partícula c . Isto é, a dinâmica do elemento de realidade $[\ddot{\mathbf{X}}_b] = \ddot{\mathbf{X}}_b$ depende, no mesmo instante do elemento de realidade *distante* X_c .

4.2.2 Médias condicionais

Queremos identificar na força Bohmiana sintomas da NL- ψ , a NL associada ao campo ψ . Apesar do campo de forças $F^{[\psi]}$ derivar explicitamente deste, através do potencial quântico, ele não o codifica em sua expressão final. Isso, porque, como vimos na subseção 3.1.2, a expressão de $F^{[\psi]}$ prevê valores infinitos para partículas localizadas em regiões muito afastadas do centroide, proibidas por ψ devido à baixa densidade de probabilidade⁹. Ou seja, esta equação por si só não nos dá um panorama claro sobre qual força típica iremos *codificar* no sistema para uma dada preparação física.

Isso não é surpreendente. As trajetórias Bohmianas (e as grandezas delas derivadas, e.g., a força) por si só não nos revelam quais delas são as mais, ou menos prováveis, ou qual ocorre *em média* — essa informação está na densidade de probabilidade, dada pelo módulo ao quadrado do campo; não por acaso a ontologia Bohmiana é fundamentada nestes dois objetos e não apenas no primeiro. Isso é típico de variáveis aleatórias. É como tentar concluir se um aluno foi aprovado em uma disciplina analisando apenas suas notas, desconsiderando os respectivos *pesos* de cada prova. Em ambas as situações, obtém-se um panorama mais completo (e justo) quando incluimos, de alguma forma, a densidade de probabilidade na narrativa.

4.2.2.1 Médias condicionais para sistemas com dois graus de liberdade

De modo a orientar um pouco a presente discussão em direção ao nosso sistema físico de interesse, considere duas partículas com massas $m_{a,b}$ e posições x_a e x_b , descritas pela função de onda $\psi(\mathbf{x})$, a priori, não-separável, em que $\mathbf{x} = (x_a, x_b)$. O campo de forças que a k -ésima partícula “vê” (com $k = a, b$) será $F_k^{[\psi]}(\mathbf{x}) = -\partial_{x_k} Q^{[\psi]}$, uma função das *duas* posições.

Ademais, dada a densidade de probabilidade $\rho_{\mathbf{x}} = |\psi(\mathbf{x})|^2$, segue que a probabilidade condicional

$$\rho_{x_a|x_b} := \frac{\rho_{\mathbf{x}}}{\rho_{x_b}} \quad (4.50)$$

é igual à ρ_{x_a} , a densidade marginal $\rho_{x_{a(b)}} = \int dx_{b(a)} \rho_{\mathbf{x}}$, se, e somente se, $\rho_{\mathbf{x}}$ for separável. Em outras palavras, o resultado anterior indica que condicionar a probabilidade da partícula b à saída da partícula a é um movimento inócuo quando não há emaranhamento — i.e., podemos assumir que a hipótese de localidade equivale à declaração de que a *probabilidade condicional é igual à marginal*.

Para mensurar a NL- ψ a primeira opção parece ser a média conjunta da força $F^{[\psi]}(\mathbf{x}) = F^{[\psi]}(x_a, x_b) \equiv F^{[\psi]}$, obtida ponderando essa por $\rho_{\mathbf{x}}$ em cada ponto do espaço, $\int F^{[\psi]} \rho_{\mathbf{x}} d\mathbf{x}$. Essa escolha, embora codifique e inclua a informação do estado através da probabilidade conjunta, apaga a dinâmica Bohmiana por completo, ou seja, ficamos¹⁰ apenas com o resultado clássico que é *insensível* ao emaranhamento e à NL- ψ e, portanto, inviável para o nosso propósito.

A solução para esse impasse é considerar *médias condicionais*, como aquelas na seção 3.3. Ou seja, somar todas as possíveis forças ponderando-as pela probabilidade de encontrar a partícula

⁹ Basicamente, enquanto $\lim_{(x-\bar{x}) \rightarrow \infty} F^{[\psi]} = \infty$, $\lim_{(x-\bar{x}) \rightarrow \infty} |\psi|^2 = 0$

¹⁰ Considerando potenciais no máximo quadráticos.

a em x_a , dado que b está em x_b . Assim, embora se apague a informação de trajetória Bohmiana associada à a , mantém-se a de b , fixa na forma de um parâmetro qualquer. Dessa forma, inclui-se a informação do campo sem perder completamente a dinâmica Bohmiana, pois essa média ainda dependerá de x_b .

Posto isso, formalmente temos duas opções: condicionar à x_a ou à x_b . Considerando o campo de forças sobre b , $F_b^{[\psi]}$, a opção mais profícua para nossos objetivos é a segunda,

$$\left\langle F_b^{[\psi]} \right\rangle_{x_b} := \int F_b^{[\psi]} \rho_{x_a|x_b} dx_a, \quad (4.51)$$

o condicionamento *local*, pois, mediando sobre as possíveis posições de x_a , descarta-se a dependência da força com a coordenada *não-local* e, dessa forma, a NL- x presente na mesma — isto é, o resultado *líquido* é uma expressão que contém apenas a NL- ψ , justamente o tipo de NL que visamos quantificar. E, caso a força seja local, então a estatística não tem efeito — em outras palavras, o condicionamento acima tende a preservar a localidade de trajetória, mesmo quando há NL- ψ , $\rho_{x_a|x_b} \neq \rho_{x_a}$.

Analogamente, considerando o campo de forças sobre a , $F_a^{[\psi]}$, a opção mais interessante é

$$\left\langle F_a^{[\psi]} \right\rangle_{x_a} := \int F_a^{[\psi]} \rho_{x_b|x_a} dx_b, \quad (4.52)$$

que também é *local* e que conta com as mesmas propriedades acima destacadas.

Ademais, condicionando à variável local (4.52), optamos, da mesma forma feita na seção 3.3, por incluir na dinâmica o estado reduzido da partícula a , que obtém-se mediando o grau de liberdade do ambiente, no caso a partícula b . Ou seja, essa é a escolha que nos permite construir um campo de velocidades e de forças *reduzidos*, associados à partícula a , cujo gerador é o estado reduzido $\text{Tr}_b(|\psi\rangle\langle\psi|)$. Como sabemos, esse é o estado que descreve o subsistema na MQ e o *campo* que guia a partícula a , na descrição reduzida da MB seção 3.3.

Repare também que, para esse mesmo condicionamento, a resultante das forças — construída pela soma das forças ponderadas pelo elemento de probabilidade $d\rho_{x_a|x_b}$ e avaliadas em cada posição x_a — atua sobre b , a partícula de interesse, cuja posição é o *elemento de realidade* que será afetado a distância caso haja NL- ψ .

Vejamos, agora, algumas propriedades do condicionamento local. Para tanto, reescrevemos (4.51) da seguinte forma,

$$\left\langle F_b^{[\psi]} \right\rangle_{x_b} = \int F_b^{[\psi]}(\mathbf{x}) \rho_{x_a} dx_a + \int F_b^{[\psi]}(\mathbf{x}) (\rho_{x_a|x_b} - \rho_{x_a}) dx_a. \quad (4.53)$$

Isso deixa explícito que o segundo termo será *não-nulo* se, e somente se:

- A. as variáveis forem *dependentes* entre si, $\rho_{x_a|x_b} \neq \rho_{x_a}$; e
- B. se $F_b^{[\psi]}$ depender de x_a .

Ou ainda, como emaranhamento ϵ é condição necessária para haver dependência entre as variáveis ($\mathbf{A} \Rightarrow \epsilon \neq 0$) e como **B** é suficiente para haver NL- x ($\mathbf{B} \Rightarrow \exists \text{ NL-}x$); o segundo termo será *não-nulo* se, e somente se:

- A. existe algum emaranhamento, i.e., $\epsilon \neq 0$;

B. a dinâmica conter aspectos de NL- x .

Assim, somos naturalmente levados a interpretar o segundo termo como responsável por mensurar a NL- ψ , o que acontecerá se, e somente se, houver NL- x e emaranhamento. Ou seja, a NL de trajetória é condição *necessária* para a manifestação das contribuições da NL de campo.

4.2.3 Sistema composto por duas partículas livres

4.2.3.1 Análise a partir de um referencial inercial

Considere duas partículas livres com massas $m_{a,b}$ e posições x_a e x_b relativas ao laboratório clássico R e que o estado é puro, separável e preparado inicialmente no estado Gaussiano $\psi(x_a, x_b, 0) = \psi_a(x_a, 0)\psi_b(x_b, 0)$, com $\psi_k(x_k; 0) = \sqrt{G_{\delta_{k,0}}(x_k - \bar{x}_{k,0})} e^{i\bar{p}_k/\hbar}$, em que \bar{p}_k é o momento médio da k -ésima partícula.

Devido a esta última hipótese e ao fato de não haver interação entre os entes, sabemos que a solução para a será sempre independente de b — é como se os graus de liberdade estivessem associados às coordenadas ortogonais de uma única partícula livre no plano — e, portanto, equivalente à da partícula livre em uma dimensão, descrita na subseção 3.1.2. Assim sendo, a função de onda para k -ésima partícula em um instante t qualquer é $\psi_k = \sqrt{G_{\delta_k}(x_k - \bar{x}_k)} e^{iS_k/\hbar}$, em que $\bar{x}_k = \bar{x}_{k,0} + \bar{p}_k t/m$ representa a função horária do centroide do pacote, que evolui conforme a partícula clássica;

$$\delta_k = \delta_{k,0} \sqrt{1 + (t/t_{k,0})^2} \quad (4.54)$$

é o desvio padrão, dado em termos da escala de tempo $t_{k,0} = \frac{2m_k\delta_{k,0}^2}{\hbar}$; e S_k a ação dada por (3.18). A densidade de probabilidade conjunta e marginal são, respectivamente, ρ_{x_a, x_b} e $\rho_{x_{a(b)}} = \int dx_{b(a)} \rho_{x_a, x_b}$.

Como anteriormente, o campo de forças que k “vê” será dado a partir do potencial quântico e terá a seguinte forma,

$$F_k^{[\psi]}(x_k, t) = \frac{x_k - \bar{x}_k}{4m_k\delta_k^4} \hbar^2, \quad (4.55)$$

divergente com x_k ; muito embora, o campo não o seja. Pela segunda lei de Newton, a aceleração a qual essa partícula está sujeita será

$$\ddot{x}_k = \frac{F_k^{[\psi]}(x_k(t), t)}{m_k} = \frac{x_k - \bar{x}_k}{t_k^2} \quad (4.56)$$

em que $x_k(t)$ é a posição da partícula no instante t , que por simplicidade notacional denotaremos simplesmente por x_k , deixando implícita a dependência temporal; e

$$t_k := 2m_k\delta_k^2/\hbar = t_{k,0} \sqrt{1 + (t/t_{k,0})^2}. \quad (4.57)$$

Note-se que a dinâmica de k é local, pois independe da outra coordenada e tampouco é proporcional ao emaranhamento, que nesse caso é nulo. Dessa forma e conforme as propriedades apresentadas em (4.53), o condicionamento local de \ddot{x}_k será inócuo, i.e.,

$$\begin{aligned} \langle \ddot{x}_k \rangle_{x_k} &= \int \frac{x_k - \bar{x}_k}{t_k^2} \rho_{x_j} dx_j + \int \frac{x_k - \bar{x}_k}{t_k^2} (\rho_{x_j|x_k} - \rho_{x_j}) dx_j \\ &= \ddot{x}_k, \end{aligned} \quad (4.58)$$

com $k = a, b$ e $j \neq k$, pois $\rho_{x_j|x_k} = \rho_{x_j}$, dado que as variáveis são independentes.

Em suma, a dinâmica observada pelo laboratório é totalmente *local*. Fato plausível, visto que, por hipótese, o referencial é inercial, de maneira que não há nenhuma força fictícia e, conseqüentemente, nenhuma NL- x ; e o estado é separável, de forma que não há emaranhamento e tampouco NL- ψ . A seguir veremos como e porque essas conclusões são alteradas quando “saltamos” para a perspectiva de uma das partículas.

4.2.3.2 Análise a partir de um referencial quântico

Para observarmos a física segundo a partícula Bohmiana a , basta implementar a troca de variáveis $(x_a, x_b) = (-X_R, X_b - X_R)$ — em que X_R e X_b são, respectivamente, a coordenada do referencial original R , ou laboratório, e a nova coordenada da partícula b —, reescrever o campo e as equações da dinâmica. Procedendo dessa forma, o novo campo, observado por a , será não separável¹¹, dado por $\Psi(X_R, X_b) = \psi_a(-X_R)\psi_b(X_b - X_R)$ e com emaranhamento igual à

$$\epsilon = \frac{1}{1 + (\delta_{b,0}/\delta_a)^2}. \quad (4.59)$$

A densidade de probabilidade conjunta e marginal são, respectivamente, ϱ_{X_R, X_b} e $\int dX_{b(R)} \rho_{X_R, X_b} = \varrho_{X_R(b)}$, cujas expressões explícitas são estudadas em seção A.2. Ou seja, a partícula a vê emaranhamento entre a posição da partícula b e a origem do laboratório R (o que não é nenhuma novidade para o leitor que passou pela seção 2.5 e seção 4.1).

As acelerações sobre R e b serão, a partir de aritméticas análogas às aquelas desenvolvidas na subseção 4.1.1, respectivamente,

$$\ddot{X}_R = \frac{X_R - \bar{X}_R}{t_a^2} \quad (4.60)$$

e

$$\ddot{X}_b = \frac{X_b - \bar{X}_b}{t_b^2} - \frac{X_R - \bar{X}_R}{t_b^2} + \frac{X_R - \bar{X}_R}{t_a^2}, \quad (4.61)$$

na qual $1/\mu = 1/m_a + 1/m_b$. Note-se que, enquanto aquela é local, esta *apresenta* aspectos de NL- x , pois depende explicitamente de X_R ; sintoma muito semelhante aquele explicitado na discussão de subseção 4.1.1, típico de forças fictícias e da troca de referenciais.

Posto isso, veremos que a estatística sobre (4.60), ou seja, a média condicionada à variável local X_R , será, assim como àquela sobre \ddot{x}_a , *inócua*,

$$\begin{aligned} \langle \ddot{X}_R \rangle_{X_R} &= \int \ddot{X}_R \varrho_{X_b} dX_b + \int \ddot{X}_R (\varrho_{X_b|X_R} - \varrho_{X_b}) dX_b \\ &= \ddot{X}_R \int \varrho_{X_b} dX_b + \ddot{X}_R \underbrace{\int (\varrho_{X_b|X_R} - \varrho_{X_b}) dX_b}_{=0} \\ &= \ddot{X}_R, \end{aligned} \quad (4.62)$$

muito embora haja agora emaranhamento, i.e., $\varrho_{X_b|X_R} \neq \varrho_{X_b}$. (Para mais detalhes consulte seção A.2.) Isso se deve, porque a segunda condição de (4.53) não é atendida (\ddot{X}_R é *local*) e pela normalização das distribuições $\varrho_{X_b|X_R}$ e ϱ_{X_b} .

¹¹ I.e., $\Psi(X_R, X_b) \neq \Phi_R(X_R)\Phi_b(X_b)$

Por outro lado, a estatística sobre (4.61) conterá um segundo termo *não-nulo* que quantificará a NL-psi, pois, diferentemente das demais, a aceleração mediada apresenta NL- χ . Isto é,

$$\begin{aligned}
 \langle \ddot{X}_b \rangle_{X_b} &= \int \ddot{X}_b q_{X_R} dX_R + \int \ddot{X}_b (q_{X_R|X_b} - q_{X_R}) dX_R \\
 &= \frac{X_b - \bar{X}_b}{t_b^2} + \frac{X_b - \bar{X}_b}{t_b^2} \left[\left(\frac{t_b}{t_a} \right)^2 - 1 \right] \Lambda^2 \\
 &= \frac{X_b - \bar{X}_b}{t_b^2} \left\{ 1 + \underbrace{\left[\left(\frac{t_b}{t_a} \right)^2 - 1 \right] \Lambda^2}_{\eta} \right\},
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

em que Λ é a correlação estatística entre as variáveis. Ou seja, a aceleração $\langle \ddot{X}_b \rangle_{X_b}$ diverge da aceleração *local* $\frac{X_b - \bar{X}_b}{t_b^2}$, quanto mais significativo for η . Para concluir que este, derivado da segunda integral, devidamente codifica a NL- ψ mostraremos que pelo menos em um, de três regimes, η é proporcional ao emaranhamento (4.59).

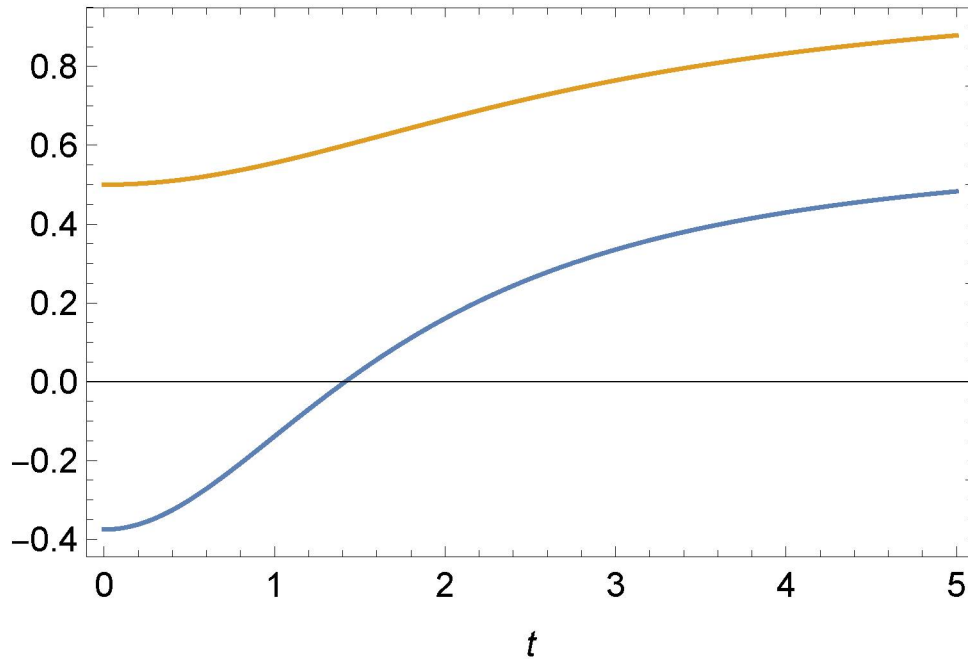


Figura 4.4 – Proporcionalidade entre ϵ (curva laranja) e η (curva azul) para $\delta_{a,0} = \delta_{b,0} = 1m$, $t_{a,0} = 2s$ e $t_{b,0} = 1s$. Caso em que $t_{a,0} > t_{b,0}$.

Graficando ambos em função do tempo, nota-se que ambos são proporcionais ao tempo e entre si sempre que a escala de Ehrenfest associada à a for maior que a de b (Figura 4.4), ou seja, quando o campo associado à a dispersar menos no tempo do que o de b . Caso contrário, a relação é inversamente proporcional (Figura 4.5).

Outra maneira de observar isso é por meio do gráfico paramétrico (Figura 4.6), que além dos casos anteriores ($t_{a,0} > t_{b,0}$ e $t_{a,0} < t_{b,0}$, em roxo e vermelho respectivamente) traz a situação accidental das escalas iguais $t_{a,0} = t_{b,0}$, em preto, na qual o η é *insensível* ao emaranhamento.

Em suma, muito embora η não seja um quantificador de emaranhamento legítimo e genuíno, é um caminho promissor, visto que apresenta relações monotônicas e contra-monotônicas entre η e o emaranhamento, exceto pelo caso accidental.

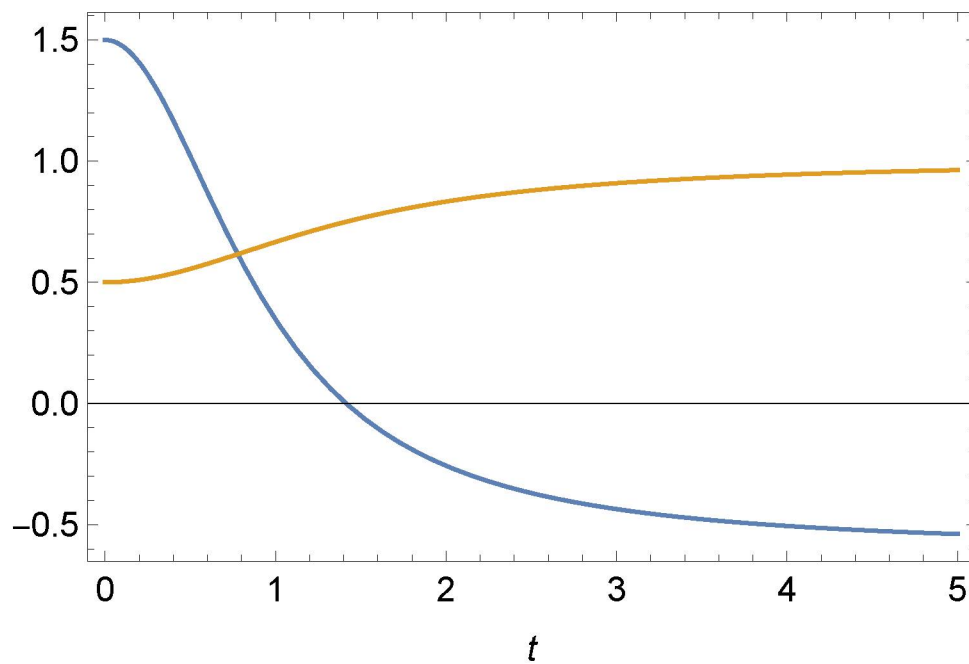


Figura 4.5 – Proporcionalidade entre ϵ (curva laranja) e η (curva azul) para $\delta_{a,0} = \delta_{b,0} = 1m$, $t_{a,0} = 1s$ e $t_{b,0} = 2s$. Caso em que $t_{a,0} < t_{b,0}$.

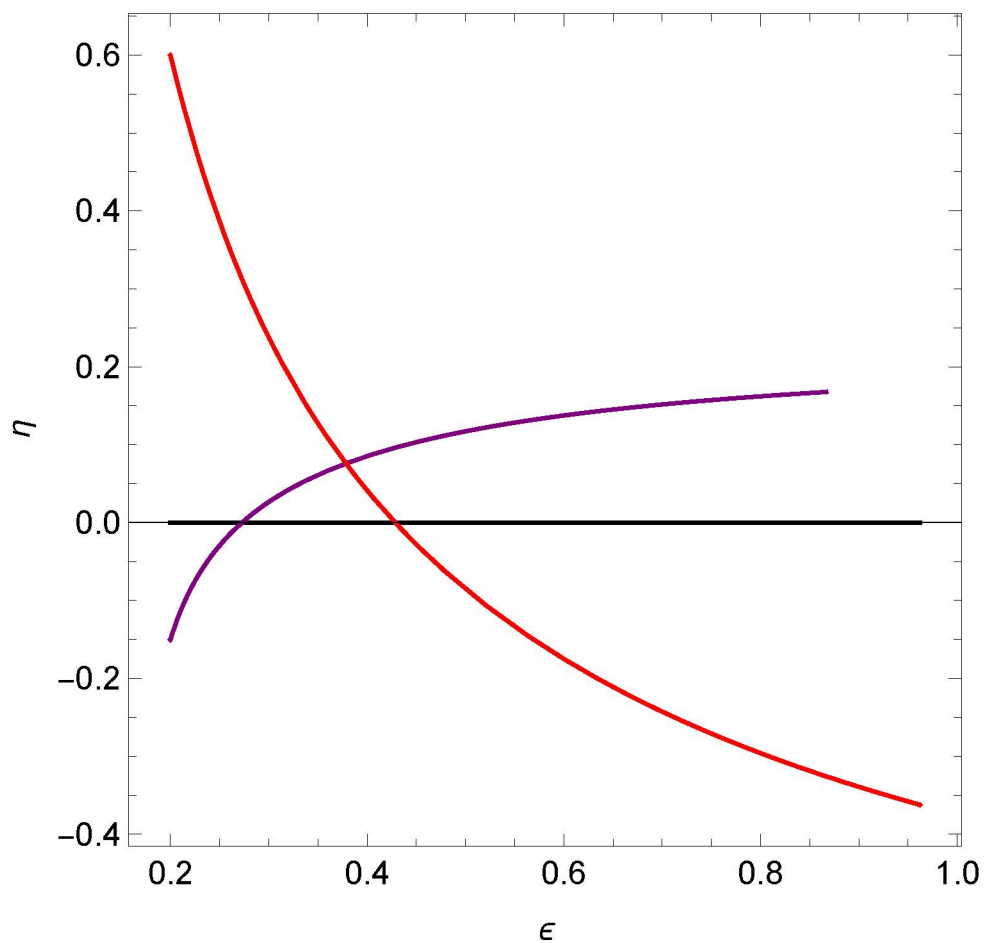


Figura 4.6 – Gráfico paramétrico do quantificador η contra o emaranhamento ϵ para $\delta_{a,0} = \delta_{b,0} = 1m$ para três casos: $t_{a,0} = t_{b,0}$ em preto, $t_{a,0} < t_{b,0}$ em vermelho e $t_{a,0} > t_{b,0}$ em roxo.

5 Conclusão

O princípio da covariância geral é um dos alicerces sobre o qual toda teoria física deveria se sustentar. Ele prescreve que as coordenadas são meros marcadores de eventos, a partir dos quais as leis físicas definitivas não deveriam depender — i.e., apenas as posições relativas importam. Quando o estendemos para o domínio quântico, vemos, entre outras coisas, que a *informação* sobre um estado quântico é covariante, muito embora os recursos que a codificam não o sejam — isto é, embora referenciais distintos concordem quanto à informação presente em certo estado, esses discordarão, por exemplo, acerca da quantidade de *emaranhamento* ou *NL*. Desses recursos, destaca-se a *NL*, pois, além de permear tanto o domínio clássico e quântico e suscitar debates fundacionais como os de EPR, é a gênese de uma das mais famosas ontologias quânticas, a MB. Nesse contexto, fizemo-nos a seguinte, e iminente, pergunta: seria possível, através da dinâmica Bohmiana, quantificar aspectos de não-localidade?

Visando elucidar essa questão, estudamos as histórias contadas pela interpretação ortodoxa e Bohmiana acerca dos aspectos não-locais da natureza. Aprendemos com Bell que, de modo a completar a MQ, no sentido dado por EPR, é preciso deixar de lado o princípio de localidade e recorrer a variáveis ocultas não-locais. Vimos, com Bohm, que uma forma de fazê-lo (de completar a MQ) é propondo que o universo seja composto de partículas (com posições bem definidas) guiadas pela função de onda, um *campo físico*, que, devido à sua não-separabilidade, torna a dinâmica não-local. Ademais, evidenciamos que, além dessa *NL*, há uma causada pela não inercialidade inerente dos referenciais Bohmianos¹. Em suma, vimos que a dinâmica Bohmiana encapsula dois tipos distintos de *NL*.

Diante dessa constatação e da nossa indagação, entendemos que uma análise assertiva requeria uma correta distinção desses fenômenos. Para tanto, categorizamos a *NL* conforme a ontologia Bohmiana, ou seja, associando cada uma a um dos elementos de realidade primitivos (posição e campo), as denominadas *NL- x* e *NL- ψ* . E, visando excluir os efeitos daquela em favor desta e inserir o campo reduzido do subsistema de interesse diretamente na dinâmica, propusemos a *média condicional local*, a qual contém um termo proporcional ao emaranhamento condicionado à *NL- x* — ou seja, esse só existe quando o sistema comporta os dois tipos de *NL*s. Fazê-lo-emo também, pois, embora a dinâmica derive do campo, não o codifica.

Com esses conceitos e ferramentas, estudamos um sistema composto por duas partículas livres (*a* e *b*) do ponto de vista de um laboratório *clássico* e de uma das partículas (a primeira). Assim, enquanto a dinâmica observada por aquele é independente (visto que não há emaranhamento) e livre de forças fictícias, a observada por este é inseparável (uma vez que as posições do laboratório e da partícula *b* estão emaranhadas) e contém forças fictícias (visto que a partícula *a* está acelerada). Dessa forma, fica nítido que, enquanto a média é inócua naquele referencial, pois o sistema é local, neste ela é responsável por um termo proporcional ao emaranhamento e, portanto, à *NL- ψ* — afinal, o sistema observado apresenta/contém *NL- x* .

Diante desse trabalho, possíveis continuações envolveriam aplicar os constructos aqui desen-

¹ Isto é, qualquer partícula Bohmiana promovida a referencial, mesmo que livre classicamente, será acelerada pelo potencial quântico

volvidos a sistemas mais complexos, com uma das partículas em superposição ou submetidas a um potencial de interação. Assim, poderíamos nos questionar acerca da dinâmica Bohmiana que um referencial em superposição prescreve e como a NL- ψ presente no sistema seria afetada. Outro caminho pertinente seria incluir uma terceira partícula no sistema e avaliar se as não-localidades descritas aqui satisfazem relações de monogamia.

REFERÊNCIAS

- [1] Herbert Lichtenegger and Bahram Mashhoon. Mach's principle. *arXiv preprint physics/0407078*, 2004.
- [2] Yakir Aharonov and Tiziah Kaufherr. Quantum frames of reference. *Physical Review D*, 30(2):368, 1984.
- [3] Fabio Costa, Nicholas Harrigan, Terry Rudolph, and Časlav Brukner. Entanglement detection with bounded reference frames. *New Journal of Physics*, 11(12):123007, 2009.
- [4] Stephen D Bartlett, Terry Rudolph, Robert W Spekkens, and Peter S Turner. Quantum communication using a bounded-size quantum reference frame. *New Journal of Physics*, 11(6):063013, 2009.
- [5] Sandu Popescu, Ana Belén Sainz, Anthony J Short, and Andreas Winter. Quantum reference frames and their applications to thermodynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 376(2123):20180111, 2018.
- [6] Martin Bojowald, Philipp A Hoehn, and Artur Tsobanjan. An effective approach to the problem of time. *Classical and quantum gravity*, 28(3):035006, 2011.
- [7] Martin Bojowald, Philipp A Höhn, and Artur Tsobanjan. Effective approach to the problem of time: general features and examples. *Physical Review D*, 83(12):125023, 2011.
- [8] Carlo Rovelli. What is observable in classical and quantum gravity? *Classical and Quantum Gravity*, 8(2):297, 1991.
- [9] Carlo Rovelli. Quantum reference systems. *Classical and Quantum Gravity*, 8(2):317, 1991.
- [10] Bianca Dittrich. Partial and complete observables for canonical general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 23(22):6155, 2006.
- [11] David Poulin and Jon Yard. Dynamics of a quantum reference frame. *New Journal of Physics*, 9(5):156, 2007.
- [12] Renato M Angelo, Nicolas Brunner, Sandu Popescu, Anthony J Short, and Paul Skrzypczyk. Physics within a quantum reference frame. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 44(14):145304, 2011.
- [13] RM Angelo and AD Ribeiro. Kinematics and dynamics in noninertial quantum frames of reference. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(46):465306, 2012.
- [14] ST Pereira and Renato M Angelo. Galilei covariance and einstein's equivalence principle in quantum reference frames. *Physical Review A*, 91(2):022107, 2015.
- [15] Rolf Landauer. Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM journal of research and development*, 5(3):183–191, 1961.

- [16] Ana CS Costa and RM Angelo. Information-based approach towards a unified resource theory. *Quantum Information Processing*, 19(9):1–14, 2020.
- [17] Michael A Nielsen and Isaac Chuang. *Quantum computation and quantum information*. American Association of Physics Teachers, 2002.
- [18] Janet Anders and Massimiliano Esposito. Focus on quantum thermodynamics. *New J. Phys*, 19(010201):21, 2017.
- [19] Hans Halvorson. *Deep beauty: understanding the quantum world through mathematical innovation*. Cambridge university press, 2011.
- [20] Giulio Chiribella, Giacomo Mauro D’Ariano, and Paolo Perinotti. Informational derivation of quantum theory. *Physical Review A*, 84(1):012311, 2011.
- [21] Matheus Fritsch Savi and Renato Moreira Angelo. Quantum resources covariance. *arXiv e-prints*, pages arXiv–2005, 2020.
- [22] Eric Chitambar and Gilad Gour. Quantum resource theories. *Reviews of Modern Physics*, 91(2):025001, 2019.
- [23] Flaminia Giacomini, Esteban Castro-Ruiz, and Ľaslav Brukner. Quantum mechanics and the covariance of physical laws in quantum reference frames. *Nature communications*, 10(1):1–13, 2019.
- [24] Jeeva Anandan and Harvey R Brown. On the reality of space-time geometry and the wavefunction. *Foundations of Physics*, 25(2):349–360, 1995.
- [25] Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, et al. Bohmian mechanics and the meaning of the wave function. *arXiv preprint quant-ph/9512031*, 1995.
- [26] Leslie E Ballentine. *Quantum mechanics: a modern development*. World Scientific Publishing Company, 2014.
- [27] Leslie E Ballentine. The statistical interpretation of quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, 42(4):358, 1970.
- [28] Gregg Jaeger. *Entanglement, information, and the interpretation of quantum mechanics*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [29] C Cohen-Tannoudji, B Diu, and F Laloe. *Quantum Mechanics, vol. 1*, 231. Singapore: Wiley, 2005.
- [30] David J Tannor. *Introduction to quantum mechanics: a time-dependent perspective*. University Science Books, 2007.
- [31] Albert Einstein, Boris Podolsky, and Nathan Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, 1935.
- [32] Michael Redhead and Fritz Rohrlich. Incompleteness, nonlocality and realism: A prolegomenon to the philosophy of quantum mechanics. *Physics Today*, 41(9):104–105, 1988.

- [33] Antony Flew. *A Dictionary of Philosophy: Revised Second Edition*. Macmillan, 1984.
- [34] John S Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195, 1964.
- [35] Nicolas Brunner, Daniel Cavalcanti, Stefano Pironio, Valerio Scarani, and Stephanie Wehner. Bell nonlocality. *Reviews of Modern Physics*, 86(2):419, 2014.
- [36] John F Clauser, Michael A Horne, Abner Shimony, and Richard A Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical review letters*, 23(15):880, 1969.
- [37] Jürgen Audretsch. *Entangled systems: new directions in quantum physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [38] Stuart J. Freedman and John F. Clauser. Experimental test of local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 28:938–941, Apr 1972.
- [39] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time-varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982.
- [40] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of modern physics*, 81(2):865, 2009.
- [41] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. i. *Phys. Rev.*, 85:166–179, Jan 1952.
- [42] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden"variables. ii. *Phys. Rev.*, 85:180–193, Jan 1952.
- [43] Louis de Broglie. *An Introduction to the Study of Wave Mechanics*. London: Methuen & Co., 1930.
- [44] Erwin Madelung. Quantentheorie in hydrodynamischer form. *Zeitschrift für Physik*, 40(3-4):322–326, 1927.
- [45] David Bohm and Henry P Stapp. *The undivided universe: An ontological interpretation of quantum theory*. American Association of Physics Teachers, 1994.
- [46] Xavier Oriols and Jordi Mompart. Overview of bohmian mechanics. *Applied Bohmian Mechanics: From Nanoscale Systems to Cosmology*, 6, 2012.
- [47] Ángel S Sanz and Salvador Miret-Artés. *A Trajectory Description of Quantum Processes. II. Applications: A Bohmian Perspective*, volume 831. Springer, 2013.
- [48] Stefan Teufel and Detlef Dürr. *Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory*. Springer, 2009.
- [49] Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, and Nino Zanghì. *Quantum physics without quantum philosophy*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [50] Detlef Dürr, Sheldon Goldstein, and Nino Zanghì. Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty. *Journal of Statistical Physics*, 67(5):843–907, 1992.

- [51] AS Sanz and Salvador Miret-Artés. A trajectory-based understanding of quantum interference. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(43):435303, 2008.
- [52] Chris Philippidis, Chris Dewdney, and Basil J Hiley. Quantum interference and the quantum potential. *Il Nuovo Cimento B (1971-1996)*, 52(1):15–28, 1979.
- [53] Roderich Tumulka. Bohmian mechanics. *arXiv preprint arXiv:1704.08017*, 2017.
- [54] Angel S Sanz and Florentino Borondo. A quantum trajectory description of decoherence. *The European Physical Journal D*, 44(2):319–326, 2007.
- [55] AS Sanz and Florentino Borondo. Contextuality, decoherence and quantum trajectories. *Chemical Physics Letters*, 478(4-6):301–306, 2009.

A Apêndice

A.1 Obtenção da trajetória da partícula livre

Uma maneira de resolver a equação,

$$\dot{x} = \frac{\hbar^2 t}{4m^2 \Delta_x^2 \Delta_{x_0}^2} (x - \bar{x}) + \dot{\bar{x}}, \quad (\text{A.1})$$

para $x(t)$ é propor uma troca de variáveis que isole a dependência temporal, integrar a equação em um intervalo de tempo e, então, reescrevê-la nas coordenadas originais. Ou seja, definindo, por exemplo, $\tilde{\xi}(t) := x(t) - \bar{x}$, com $\dot{\tilde{\xi}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}}$, a equação (A.1) resume-se à

$$\frac{\dot{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}} = \left(\frac{\Delta_{x_0}}{\tau \Delta_x} \right)^2 t, \quad (\text{A.2})$$

na qual usamos $\tau^2 = (\hbar/2m\Delta_{x_0}^2)^2$. Então, integrando-a no intervalo $[0, t']$ obtém-se

$$\begin{aligned} \ln \left[\frac{\tilde{\xi}(t')}{\tilde{\xi}(0)} \right] &= \int_0^{t'} \frac{1}{(\Delta_x/\Delta_{x_0})^2} \frac{t \, dt}{\tau^2} \\ &= \ln \left[\frac{T(t')}{T(0)} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

na qual usa-se a variável auxiliar $T = (\Delta_x/\Delta_{x_0})^2 = 1 + (t/\tau)^2$ para facilitar a integração do lado direito. Por fim, trocando t' por t

$$\ln \left[\frac{\tilde{\xi}(t)}{\tilde{\xi}(0)} \right] = \ln \left[\frac{\Delta_x}{\Delta_{x_0}} \right], \quad (\text{A.4})$$

$\tilde{\xi}$ por x ,

$$\ln \left[\frac{x(t) - \bar{x}}{x(0) - \bar{x}_0} \right] = \ln \left[\frac{\Delta_x}{\Delta_{x_0}} \right] \quad (\text{A.5})$$

e comparando os logaritmandos, tem-se

$$x(t) - \bar{x} = \frac{\Delta_x}{\Delta_{x_0}} [x(0) - \bar{x}_0]. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Distribuição normal genérica

Considere a seguinte distribuição normal de duas variáveis aleatórias, x_a e x_b ,

$$\rho_{x_a, x_b} = \sqrt{1 - \Lambda^2} G_{\tilde{\delta}_a}(x_a - \bar{x}_a) G_{\tilde{\delta}_b}(x_b - \bar{x}_b) e^{\frac{\Lambda(x_a - \bar{x}_a)(x_b - \bar{x}_b)}{\tilde{\delta}_a \tilde{\delta}_b (1 - \Lambda^2)}}, \quad (\text{A.7})$$

na qual $G_{\tilde{\delta}_{a(b)}}(x_{a(b)} - \bar{x}_{a(b)})$ denota uma Gaussiana com média $\bar{x}_{a(b)}$ e desvio $\tilde{\delta}_a = \delta_a \sqrt{1 - \Lambda^2}$; $\delta_{a(b)}^2$ o desvio do par de variáveis e $\Lambda = \frac{\langle (x_a - \bar{x}_a)(x_b - \bar{x}_b) \rangle}{\delta_a \delta_b} \in [-1, 1]$ a *correlação* entre essas.

Essa distribuição, além de normalizada, apresenta duas propriedades:

1. as variáveis são *independentes* se, e somente se, $\Lambda = 0$;
2. a densidade é simétrica (ou “par”) pela troca de índices (a por b e vice-versa).

Devido a segunda, suas probabilidades *marginais*, $\rho_{x_{a(b)}} = \int dx_{b(a)} \rho_{x_a, x_b}$ e *condicionais*, $\rho_{x_a|x_b} := \rho_{x_a, x_b} / \rho_{x_b}$, também serão. A expressão explícita desta será:

$$\rho_{x_a|x_b} = \frac{e^{-\frac{\left\{x_a - \left[\bar{x}_a + \Lambda(x_b - \bar{x}_b)\frac{\delta_a}{\delta_b}\right]\right\}^2}{2\pi(1-\Lambda^2)\delta_a^2}}}{\sqrt{2\pi(1-\Lambda^2)\delta_a^2}} = G_{\tilde{\delta}_a}(x_a - \tilde{x}_a) \quad (\text{A.8})$$

ou seja, uma distribuição normal com média $\tilde{x}_a = \bar{x}_a + \Lambda(x_b - \bar{x}_b)\frac{\delta_a}{\delta_b}$ e desvio padrão $\tilde{\delta}_a = \delta_a\sqrt{(1-\Lambda^2)}$. Portanto, fica claro que a média de $x_{a(b)}$ condicionada à $b(a)$, equivale à:

$$\langle x_{a(b)} \rangle_{x_{b(a)}} = \bar{x}_{a(b)} + \Lambda[x_{b(a)} - \bar{x}_{b(a)}]\frac{\delta_{a(b)}}{\delta_{b(a)}}. \quad (\text{A.9})$$

A.3 Distribuição normal nas coordenadas relativas à a

Do ponto de vista da partícula a o estado é emaranhado e a densidade de probabilidade correlacionada $\Lambda \neq 0$. Como as coordenadas em seção A.2 são meros rótulos, adaptamos esses para as coordenadas de a desta forma: $(x_a, x_b) = (X_R, X_b)$, $(\delta_a, \delta_b) = (\Delta_R, \Delta_b)$

Assim, temos as probabilidades conjunta

$$\rho_{X_R, X_b} = \sqrt{1-\Lambda^2} G_{\tilde{\Delta}_R}(X_R - \tilde{X}_R) G_{\tilde{\Delta}_b}(X_b - \tilde{X}_b) e^{\frac{\Lambda(X_R - \tilde{X}_R)(X_b - \tilde{X}_b)}{\Delta_R \Delta_b (1-\Lambda^2)}}, \quad (\text{A.10})$$

marginais

$$\rho_{X_R} = G_{\Delta_R}(X_R - \bar{X}_R) \quad \rho_{X_b} = G_{\Delta_b}(X_b - \bar{X}_b), \quad (\text{A.11})$$

e condicionais

$$\rho_{X_R|X_b} = G_{\tilde{\Delta}_R}(X_R - \tilde{X}_R), \quad \rho_{X_b|X_R} = G_{\tilde{\Delta}_b}(X_b - \tilde{X}_b), \quad (\text{A.12})$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{X}_R &= \bar{X}_R + \Lambda^2(X_b - \bar{X}_b) & \tilde{\Delta}_R &= \frac{\Delta_R}{\Delta_b} \sqrt{\Delta_b^2 - \Delta_R^2} \\ \tilde{X}_b &= \bar{X}_b + X_R - \bar{X}_R & \tilde{\Delta}_b &= \sqrt{\Delta_b^2 - \Delta_R^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

pois $\Lambda = \frac{\Delta_R}{\Delta_b}$.

Com essas equações em mãos, a média condicionada à X_b de

$$\ddot{X}_b = \frac{\textcolor{red}{X_b - \bar{X}_b}}{\textcolor{red}{t_b^2}} - \frac{X_R - \bar{X}_R}{t_b^2} + \frac{X_R - \bar{X}_R}{t_a^2}, \quad (\text{A.14})$$

— na qual o termo em vermelho denota a contribuição constante para a média — será

$$\begin{aligned} \langle \ddot{X}_b \rangle_{X_b} &= \int \ddot{X}_b \rho_{X_R} dX_R + \int \ddot{X}_b [\rho_{X_R|X_b} - \rho_{X_R}] dX_R \\ &= \underbrace{\int \ddot{X}_b G_{\Delta_R}(X_R - \bar{X}_R) dX_R}_{I_1} + \underbrace{\int \ddot{X}_b [G_{\tilde{\Delta}_R}(X_R - \tilde{X}_R) - G_{\Delta_R}(X_R - \bar{X}_R)] dX_R}_{I_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

da qual

$$I_1 = \frac{(X_b - \bar{X}_b)}{t_b^2} \quad (\text{A.16})$$

e

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int \left[-\frac{X_R - \bar{X}_R}{t_b^2} + \frac{X_R - \bar{X}_R}{t_a^2} \right] G_{\tilde{\Delta}_R}(X_R - \tilde{X}_R) dX_R \\
&= \left(\frac{1}{t_a^2} - \frac{1}{t_b^2} \right) \int (X_R - \bar{X}_R) G_{\tilde{\Delta}_R}(X_R - \tilde{X}_R) dX_R \\
&= \Lambda^2 \frac{(X_b - \bar{X}_b)}{t_b^2} \left[\left(\frac{t_b}{t_a} \right)^2 - 1 \right].
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Então, somando-as, encontra-se:

$$\langle \ddot{X}_b \rangle_{X_b} = \frac{(X_b - \bar{X}_b)}{t_b^2} \left\{ 1 + \Lambda^2 \left[\left(\frac{t_b}{t_a} \right)^2 - 1 \right] \right\}. \tag{A.18}$$